ひとりで学べる

一般相対性理論

唐木田健一 著
Ken-ichi Karakida

ディラックの記号法で宇宙の方程式を解く

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

講談社

ひとりで学べる

一般相対性理論

唐木田健一 著
Ken-ichi Karakida

ディラックの記号法で宇宙の方程式を解く

講談社

ブックデザイン――安田あたる

まえがき

本書は，物理学を専攻としない人々を対象として，一般相対性理論に真正面から取り組むためのガイドをめざしたものです．一般相対性理論を構成する道具はテンソルです．テンソル代数に親しめるかどうかが，まずは理解の鍵になります．

テンソル代数について著者が着目したのは，ディラック『一般相対性理論』*です．ここでディラックは，彼独特の記号の使い方を含め，章を追うごとに一般相対性理論に関わるテンソル代数の全体について展望が開けてくるという仕組みをつくっています．しかし，ディラックの記述は，物理学徒でもつまずくことが多いと聞きます．

本書の第Ⅱ章「テンソルの代数」は，ディラックの記号法と論旨にもとづき，詳細な解説をおこなったものです．したがって本書全体は，ディラック『一般相対性理論』への入門とも位置づけることができます．ディラックおよび一般相対性理論（→アインシュタイン）は，物理学を専攻としない人々にとっても，大変に魅力ある存在です．

著者はむかしから，新しい思想・理論の生成過程について関心をもっています．その意味で，一般相対性理論は非常に興味深い対象の一つです．本書でも，理解に資する範囲に限定はされますが，主として第Ⅰ章「総合的背景」において，理論誕生の背景について触れました．

一般相対性理論を学ぼうとする人は，ほとんど例外なく，「重力による光線の湾曲」や「水星の近日点移動」，そして「膨張宇宙モデル」の詳細を知りたいと思うでしょう．本書第Ⅲ章「重力方程式の展開と応用」では，具体的な数値による計算を含め，それらをできる限り論理的に飛躍のない形で説明しました．

一般相対性理論は，（特殊相対性理論もそうですが）アインシュタインに

---

* P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*. 最初の版は，1975 年に John Wiley & Sons, Inc. より刊行された．なお，著者が参照した文献は，Princeton University Press の版（1996）および江沢洋訳『一般相対性理論』東京図書（1977），ちくま学芸文庫（2005）である．

よってほとんど独力で築き上げられました．著者はこれを，個人により発想された理論として，歴史上最も偉大な試みであると考えています．「このような稀有な作品は，少しでも多くの人々に鑑賞されるべきである」というのが本書執筆の動機の一部です．

一般相対性理論はアインシュタインがほとんど独力で築き上げたものですが，それは同時に，多くの先人たちの業績にもとづいています．独創的な仕事は決して孤立して存在するものではありません．しばしば誤解されているようですが，《天才アインシュタインは無から有を生み出した》のではありません．いかなる問題意識と着想とをもってアインシュタインは先人たちの業績を活用していったのか．これも重要なポイントの一つです．

本書では，読者が道に迷わぬよう丁寧なガイドをしています．ただし，それによって，登るべき山の高さが低くなったわけではありません．「読者は自分の足で頂上をめざさねばならぬ」という事態には，何も変わりはありません．

2015年10月

唐木田健一

ひとりで学べる一般相対性理論
CONTENTS

第Ⅰ章 総合的背景 1

第Ⅱ章 テンソルの代数 49

第 I 章

総合的背景

> 本書は，高校レベルでの力学および微分の学習経験がある人および（「一般相対性理論」へのガイドなので）何らかの形で特殊相対性理論に接したことのある人を読者に想定している．ただし，いずれも基本法則程度のことに言及するのみで，細部の知識は要求しない．なお，その辺の領域に関する参考書としては，著者による『原論文で学ぶ　アインシュタインの相対性理論』ちくま学芸文庫（2012）をお勧めする．

1 相対性原理

ニュートン力学も特殊相対性理論も，その諸法則が成立するためには特別な座標系を必要とする．それが「慣性系」である．慣性系とは「慣性の法則」が成立する座標系のことで，「外力の作用がない物体は静止または等速直線運動を続ける」系のことである．

いわゆる「無重力空間」に固定された座標系は慣性系である．そこでは，静止した物体は外力の作用がない限り静止を保ち，また外力の作用で運動を開始した物体は，等速直線運動を続ける．地球表面に固定した座標系は慣性系ではない．そこでは，物体の静止状態を保つには，重力に抗した力を加えなければならない．その力が消失すると，物体は地球の中心に向かって（等速ではなく）加速度運動を始める．ただし，重力や摩擦の効果を最小にした地表の系（たとえば，水平面上での球の運動）では，慣性の法則が近似的に成立しており，そこは近似的に慣性系とみなすことができる．これが地表での観察や実験で力学の法則が発見できた理由の一端である．慣性系の概念は，ニュートン力学や特殊相対性理論と同様，一般相対性理論においても重要な役割を果たす．

相対性理論は「相対性原理」にもとづく．相対性原理は「物理法則はすべての座標系において同じ形式で記述される」ことを主張する．ただし，すべての座標系といっても，ニュートン力学と特殊相対性理論の場合，それは慣性系に限定される．そして，それら慣性系どうしを結びつける変換式が存在し，ニュートン力学においては「ガリレイ変換の式」が知られている．

ある慣性系K（座標 x, y, z）を設定し，これを「静止系」と呼ぶことにする．そして，一つの例として，その系の x 軸方向に一定速度 v で並進する

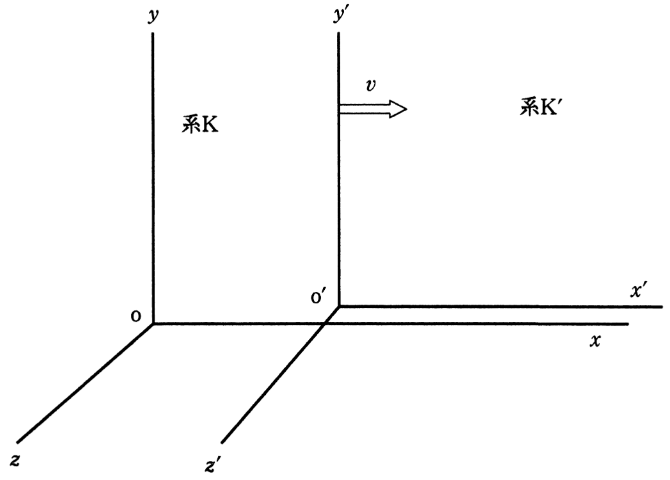


図 I.1 「静止系」K と「運動系」K′

「運動系」K′（座標 x', y', z'）を考えると〔図I.1〕，これも慣性系である．このとき，系 K と K′ を結ぶガリレイ変換の式は，系 K′ の y' 軸および z' 軸がそれぞれ系 K の y 軸および z 軸と平行を保ち，また共通の時刻 $t=t'=0$ のとき二つの系の原点は一致していたとすると，

$$x'=x-vt,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t \tag{I.1.1}$$

で与えられる．

ガリレイ変換は，ニュートン力学の諸法則の形式を不変に保つ．すなわち，ニュートン力学の諸法則はすべての慣性系において同じ形式で表現される．他方，電磁気学や光学の分野における基本法則としてマクスウェル方程式という一群の式が知られているが，これにガリレイ変換を適用すると式の形は変わってしまう．すなわち，電磁気学や光学では，（ガリレイの）相対性原理が成立しない．この事態を問題として自覚的に取り組んだのがアインシュタイン（A. Einstein, 1879–1955）である．彼の特殊相対性理論は，力

学の法則だけでなく，電磁気学や光学の法則においても相対性原理が成立することを示した．

アインシュタインのなしたことを簡単に結果だけで表現すると，彼はマクスウェル方程式を不変に保つ変換式を見つけ出し，その変換に対して不変であるようニュートン力学の諸法則を書き直したのである．

彼が発見した変換式は「ローレンツ変換」という名で知られ，上に導入した系 K および K′ に関しては，光速度を c とすると，

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{I.1.2}$$

と表される．このローレンツ変換にもとづき，特殊相対性理論において知られる諸効果，すなわち運動する物体における長さの短縮，時間の遅れ，質量の増加，などが導出できる．

以上が，「一般相対性理論」に先立つ経過の要約である．本書の対象である一般相対性理論は文字通り，慣性系に限らず，相対性原理の一般的成立をめざす．すなわち，すべての座標系において同じ形式で記述される物理法則の探究である．

2　特殊相対性理論の復習

特殊相対性理論は，一般相対性理論に手がかりと根拠を与える．ここでは，本書にこれから登場する特殊相対性理論に関係した諸概念および諸量につき紹介する．なお，座標変換による不変関係の「証明」は，特殊相対性理論における $(1-v^2/c^2)$ の性格などを思い起こしてもらうために敢えて記述したが，わずらわしいと感じる読者も多いであろう．その場合には，該当箇所は読み飛ばしてほしい．そこで何か新しいことが述べられているわけではない．

四次元空間

ガリレイ変換の（I.1.1）では，時間座標は系 K と K′ で共通である．他方，ローレンツ変換の（I.1.2）では，時間座標の変換に位置座標（上の例の場合は x）が入ってくる．そこで，特殊相対性理論では時間と位置を統合的に扱い，(ct,x,y,z) を座標とした四次元空間での幾何学が用いられる．時間 t に光速度 c が乗じられているのは，(x,y,z) と t の次元を合わせるためである．ct は長さの次元になる．

基本的な不変関係

ローレンツ変換の（I.1.2）においては，

$$(ct')^2-x'^2-y'^2-z'^2=(ct)^2-x^2-y^2-z^2 \tag{I.2.1}$$

の関係が成立している．これは簡単な計算で確認することができる．すなわち，（I.1.2）の関係を用いて，

$$\begin{aligned}
&(ct')^2-x'^2-y'^2-z'^2\\
&=c^2\frac{\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right)^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}-\frac{(x-vt)^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}-y^2-z^2\\
&=\frac{c^2\left(t^2-2\dfrac{v}{c^2}xt+\dfrac{v^2}{c^4}x^2\right)-(x^2-2vtx+v^2t^2)}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}-y^2-z^2\\
&=\frac{c^2t^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)-x^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}-y^2-z^2\\
&=(ct)^2-x^2-y^2-z^2
\end{aligned} \tag{I.2.2}$$

を得る．

不変距離

系 K における 2 点 (ct_1, x_1, y_1, z_1) および (ct_2, x_2, y_2, z_2) で定義される量

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{I.2.3}$$

も，系 K′ への変換に対し不変に保たれる．すなわち，またローレンツ変換（I.1.2）を用いて，

$$\begin{aligned}
&c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 \\
&= c^2\left(\frac{\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) - \left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 - \left(\frac{(x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 \\
&\quad - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\
&= c^2\frac{\left((t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{((x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1))^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\
&= \frac{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(t_2 - t_1)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(x_2 - x_1)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\
&= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2
\end{aligned} \tag{I.2.4}$$

が成立する．

（I.2.3）の Δs は，「四次元空間における 2 点間の距離」と呼ばれる．通常の三次元空間における距離 l

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{I.2.5}$$

はローレンツ変換によって変化してしまう．すなわち，座標変換に対して不変ではない．このことは，運動する物体を静止系から観測すると，その長さ l が（運動方向に）短縮されることに対応する．それに対し距離 Δs は，ど

の座標系から観察しても不変である．

ところで，(I.2.3) の Δs はなぜ「距離」なのか．四次元空間での距離なら，(I.2.5) のような形式に，もう一つ2乗の項が付加された形が自然のように思われる．しかしそれは，時間変数の選び方の問題に過ぎない．時間変数として t の代わりに it (i は虚数 $\sqrt{-1}$ を表す文字) を用いて2乗の項の和として表現すると，

$$
\begin{aligned}
&(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+c^2(it_2-it_1)^2 \\
&\quad=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2
\end{aligned}
\tag{I.2.6}
$$

この左辺を $-\Delta s^2$ と定義すれば，変換に対する不変量 (I.2.3) を得る．

通常の三次元空間における幾何学では，距離（長さ）の測定が本質的に重要である．それと同様，四次元空間における距離は，計量の基本となる重要な量である．四次元空間における距離 Δs はいかなる座標系に対しても不変である．ただし，あとで立ち入って議論することになるが，Δs が (I.2.3) の右辺のように表現されるのは，特殊相対性理論が成立する慣性系においてのみである．

時間的領域と空間的領域

特殊相対性理論に四次元空間を導入したミンコフスキー (H. Minkowski, 1864–1909) は，この空間における $\Delta s^2>0$ の領域を時間的，そして $\Delta s^2<0$ の領域を空間的と名づけた．時間的領域では Δs は実数，そして空間的領域では虚数である．

微分形式

(I.2.3) の距離 Δs^2 は，微分形式では

$$
ds^2=(cdt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2 \tag{I.2.7}
$$

と表現される．ここで，参考までに，ローレンツ変換 (I.1.2) の微分形は

$$dx'=\frac{dx-vdt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad dy'=dy,\quad dz'=dz,\quad dt'=\frac{dt-\frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(I.2.8)}$$

である．

不変な関係をもう一つ

ついでに，あとのために，ローレンツ変換に対して不変な関係をもう一つ示しておく．それは，

$$\begin{aligned} &c^2dt_1'dt_2'-dx_1'dx_2'-dy_1'dy_2'-dz_1'dz_2' \\ &\quad =c^2dt_1dt_2-dx_1dx_2-dy_1dy_2-dz_1dz_2 \end{aligned} \qquad \text{(I.2.9)}$$

というもので，ローレンツ変換の微分形（I.2.8）をこの式の左辺に代入して

$$\begin{aligned} &c^2dt_1'dt_2'-dx_1'dx_2'-dy_1'dy_2'-dz_1'dz_2' \\ &=\frac{c^2\left(dt_1-\frac{v}{c^2}dx_1\right)\left(dt_2-\frac{v}{c^2}dx_2\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{(dx_1-vdt_1)(dx_2-vdt_2)}{1-\frac{v^2}{c^2}}-dy_1dy_2-dz_1dz_2 \\ &=\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2dt_1dt_2-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)dx_1dx_2}{1-\frac{v^2}{c^2}}-dy_1dy_2-dz_1dz_2 \\ &=c^2dt_1dt_2-dx_1dx_2-dy_1dy_2-dz_1dz_2 \end{aligned} \qquad \text{(I.2.10)}$$

を得る．

固有時

運動する物体の速度が0となるように設定した座標系，すなわち物体とともに運動する座標系における時間を「固有時」$d\tau$ という．特殊相対性理論の場合は，（I.2.7）より

$$ds^2=(cdt')^2-(dx')^2-(dy')^2-(dz')^2=(cdt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2 \tag{I.2.11}$$

ここで，物体は運動する座標系 (ct',x',y',z') に固定されているとすると，この系に対する物体の位置変化はないので $dx'=dy'=dz'=0$，またこのときの時間が固有時なので $t'=\tau$ とおくと，

$$ds=cd\tau=cdt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}{(dt)^2}\right)} \tag{I.2.12}$$

物体は，座標系 (ct,x,y,z) からみて，時間 dt の間に距離 $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$ を進むので，その速度を v で表すと，(I.2.12) から

$$d\tau=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{I.2.13}$$

また，すでに (I.2.12) に含まれているが，

$$ds=cd\tau \tag{I.2.14}$$

である．

固有時 $d\tau$ と ds とはこのような関係にあり，したがって，$d\tau$ は ds と同様，不変量である．また，(I.2.13) によれば $d\tau \leq dt$ であり，固有時は常にもっとも短い（すなわち，時間の進みが遅い）．

固有時 $d\tau$ は，座標系 K′（「運動系」）に固定された時計の進みを，系 K（「静止系」）から観測したものに対応する．すなわち，運動する物体においては時間が遅れるのである．このことは，ローレンツ変換の微分形 (I.2.8) の dt' の式に，「運動系に固定された時計」の静止系からみた位置変化 $dx=vdt$ を代入すれば，(I.2.13) と同じ式（ただし $d\tau=dt'$）が得られることからわかる．

特殊相対性理論ではこのように，慣性系の運動速度によって時計の進みは異なる．そこで，不変量である固有時を，いわば「標準時」として用いるのである．他方，系 K に固定された時計は時間 dt を示し，これは「座標時」

と呼ばれる．座標時は固有時とは異なり，不変量ではない．

固有時は，運動系における現実の時間の流れに対応する．すなわち，仮に静止系から運動系の様子を観察できたとすると，時間の進みが遅いことに対応して，そこにおける生物の成長・加齢も遅いことをみるであろう．これはいわゆる「双子のパラドックス」に関係するが，この問題は本書では扱わない．なお，「パラドックス」が理論的矛盾を意味するのであれば，パラドックスなるものは存在しない．

「固有時」への注

① 固有時は「運動する物体の速度が0となるように設定した座標系，すなわち物体とともに運動する座標系における時間」である．したがって，運動する物体を記述する座標系（静止系）の存在が前提である．

② 固有時は（I.2.11）の $ds^2=(cdt')^2-(dx')^2-(dy')^2-(dz')^2$ の関係においてて $ds=cd\tau$ と定義され，ds が不変量であるため $d\tau$ も不変量になる（c はもともと不変量である）．したがって固有時は，この関係が成立する座標系〔すなわち（本書の範囲内では）慣性系〕に関して測定されなければならない．

速度ベクトル

特殊相対性理論では，固有時 τ を用いて，「速度ベクトル」と呼ばれる量

$$\left(\frac{d(ct)}{d\tau},\ \frac{dx}{d\tau},\ \frac{dy}{d\tau},\ \frac{dz}{d\tau}\right) \tag{I.2.15}$$

が定義される．通常の三次元空間ではベクトルの成分は三つであるが，ここは四次元なので成分は四つである．このうち第一のものは速度ベクトルの「時間成分」と呼ばれ，いろいろな場面で重要な役割を果たす．

この速度ベクトルは（I.2.14）の関係を使って，

$$\left(\frac{d(ct)}{ds},\ \frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right) \tag{I.2.16}$$

と書かれる場合もある．このとき，各成分の分母はcを含み，その次元は（「時間」ではなく）「長さ」である．

速度ベクトルの変換規則について述べておく．ローレンツ変換（I.2.8）において，ctを一つの変数としてまとめると，

$$dx'=\frac{dx-\dfrac{v}{c}d(ct)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\quad dy'=dy,\quad dz'=dz,\quad d(ct')=\frac{d(ct)-\dfrac{v}{c}dx}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{I.2.17}$$

この各式の両辺を$d\tau$で割ると，

$$\frac{dx'}{d\tau}=\frac{\dfrac{dx}{d\tau}-\dfrac{v}{c}\dfrac{d(ct)}{d\tau}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\quad \frac{dy'}{d\tau}=\frac{dy}{d\tau},\quad \frac{dz'}{d\tau}=\frac{dz}{d\tau},\quad \frac{d(ct')}{d\tau}=\frac{\dfrac{d(ct)}{d\tau}-\dfrac{v}{c}\dfrac{dx}{d\tau}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{I.2.18}$$

これは，速度ベクトル（I.2.15）がローレンツ変換と同一の形式で変換されることを意味する．（I.2.16）でも同じことである．あとで説明されるが（本章7節），これが「速度**ベクトル**」という名称の由来である．

ガリレイ-ニュートン的力学との対応

特殊相対性理論の効果が無視できるような場合，すなわち対象とする物体（座標系）の運動速度が光速度にくらべて十分に小さい場合には，ローレンツ変換（I.1.2）において$v^2/c^2 \approx 0$，$v/c^2 \approx 0$とすることができ，それはガリレイ変換（I.1.1）と一致する．このとき，不変距離Δs^2（I.2.3）では「時間の項」と「距離の項」とが独立になり，それぞれが不変量になる．すなわち，時間はすべての座標系に共通となり，また通常の三次元空間における距離（I.2.5）も不変量となる．したがって，もちろん，全体のΔs^2も不変量のままである．

またこのとき，（I.2.13）により$d\tau \approx dt$となるので，（I.2.15）の形式の速度ベクトルは，時間成分がc，またx, y, z成分は三次元における通常の速度

ベクトルになる．(I.2.16) の形式でも同様であるが，$1/c$ の因子のみ異なる．

3 曲がった空間

加速度のある系

特殊相対性理論は慣性系に関わる理論である．したがって，それを加速度のある系（すなわち，慣性系に対して一様な直線運動にはない系）に適用しようとすると，理論の前提となった空間と時間の物理的解釈に関して矛盾が発生する．加速度のある系としてもっとも重要なのは重力場が存在する系である．しかしここでは，簡単のため，一定速度で回転する円盤の系について考察する．これは，アインシュタインがしばしば取り上げたものである．

ある慣性系に，一定の角速度で回転する比較的に大きな円盤があったとする．この円盤には，慣性系からみると，回転の中心に向かう加速度が存在する．ここで，測量のための基準単位として，長さの等しい（ただし，円盤の大きさにくらべて十分に短い）棒を多数用意しておく．円盤が（慣性系に対して）静止しているとき，この基準の棒を並べることによって円盤の直径 D と円周 U を測定すると，$U/D=\pi$ を得るはずである．これに対し，円盤が回転している場合は，円周上の棒はその長さ方向に一定速度で運動しているので，特殊相対性理論の効果によって，慣性系から観測すると短くなる．他方，直径上に並べられた棒の運動には長さ方向の速度成分はなく，したがって短縮は観測されない．そのため，慣性系からみると，$U/D<\pi$ となる．ここでは通常の幾何学が成立していない．

アインシュタインは，この事態が曲面の幾何学に現れるものと類似していることに気がついた．曲面に描かれた図形では，円周率が π からずれたり，三角形の内角の和が 180° でなかったりする*1．すなわち，加速度の効果は，

---

*1　たとえば，球体表面において，赤道上の 2 点と極点の一つとを最短距離（ということは経線）で結んだ三角形の内角の和は，明らかに 180° より大きい．また，この球体表面に描いた円の円周率は，π よりも小さい．

空間が曲がったものと解釈できるということである.

ガウスの幾何学

曲面の幾何学については，先立つ業績が存在する．ガウス（K. F. Gauss, 1777–1855）は，二次元曲面上での近傍の2点間の距離を与える基本式

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{I.3.1}$$

を提出した．ここで，u および v は二次元曲面上での位置を指定する曲線座標（たとえば，球面上であるなら，緯度および経度），また E, F, G は u および v の関数である．E, F, G は曲面上の各点 (u,v) における曲面の曲がり具合を反映する．この ds はすべての座標変換に対して不変である．本書ではこの ds を「不変距離」と呼ぶ．またこのあと，ds^2 も便宜的に不変距離と呼ぶことがある*2.

このガウスの式は，考察している曲面の十分に小さな領域は常に平面とみなすことができ，そこに直交座標 (U,V) を設定したとき，2点間の微小距離 ds が

$$ds^2 = dU^2 + dV^2 \tag{I.3.2}$$

で定義できる場合に成立する．この距離は（特殊相対性理論の効果を無視すれば），いかなる座標系からみても不変である*3．したがって，直交座標 (U, V) は（I.3.2）が測定できさえすればよいので，曲面上のいかなる方向のものであっても構わない.

ところで，直交座標 (U,V) は曲面上にあるので，U 軸および V 軸上の各点は (u,v) によって指定される．すなわち，U および V はともに，u および v の関数である．ここで，偏微分の基本公式*4 によれば，

---

*2　あらためて確認しておくが,「不変」とは座標変換に対して不変ということであって，曲面上で不変（すなわち一定値を保つ）という意味ではない.

*3　あとの問題と直接に関係するが，特殊相対性理論を考慮するなら，（I.2.7）を参照して，（I.3.2）を $ds^2 = c^2dt^2 - dU^2 - dV^2$ とすればよい.

*4　偏微分の基本について確認の必要な読者は，9節の「偏微分」の項参照.

$$dU=\frac{\partial U}{\partial u}du+\frac{\partial U}{\partial v}dv,\quad dV=\frac{\partial V}{\partial u}du+\frac{\partial V}{\partial v}dv \tag{I.3.3}$$

と書くことができる．そこで，これらを（I.3.2）に代入して整理すると，

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{\partial U}{\partial u}du+\frac{\partial U}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial u}du+\frac{\partial V}{\partial v}dv\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2\right)du^2+2\left(\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v}+\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v}\right)dudv \\ &\quad +\left(\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2\right)dv^2 \end{aligned} \tag{I.3.4}$$

ここで，

$$E=\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2,\quad F=\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v}+\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v},\quad G=\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 \tag{I.3.5}$$

と定義すれば（I.3.1）になる．

（I.3.1）は微小距離を表現するが，それを積分すれば曲面上の有限な（すなわち微小ではない）長さの不変距離を得ることができる*5．他方，（I.3.2）の微小距離は，平面とみなすことのできる微小領域にのみ通用するものである．通常の平面幾何学は（I.3.2）で定義される距離（長さ）にもとづく．それと同様，ガウスの曲面幾何学は，（I.3.1）で定義される距離の上に築かれているのである．

リーマン空間

のちになってリーマン（G. F. B. Riemann, 1826–1866）はガウスの不変距離を N 次元曲面（「多様体」）に拡張し，

*5　媒介変数 t の変化に伴って，曲面上のある点から別の点へと点 (u, v) が移動すると考えれば，（I.3.1）は $ds/dt=\sqrt{E(du/dt)^2+2F(du/dt)(dv/dt)+G(dv/dt)^2}$ と書ける．ここで，着目する点から点へと，両辺を t で積分すれば，目的の距離を算出できる．

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{N} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{I.3.6}$$

の形式で与えた．ここで，$g_{\mu\nu}$ は座標 x^μ $(\mu=1,2,\cdots N)$ *6 の関数で，「計量テンソル」と呼ばれる重要な量である．計量テンソルは空間の曲がり具合を反映する．$g_{\mu\nu}$ は添字 μ，ν について対称で，$g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$ である．このリーマンの N 次元曲面は「リーマン空間」と呼ばれる．アインシュタインは，加速度のある系の記述に，四次元のリーマン空間を採用した．

この（I.3.6）で座標 x^μ の添字 μ を上に付けたのは本書でのあとの展開を考えてのことであるが，ここではあまり気にする必要はない．ただし，座標 x の上に添えられた文字・数字は座標成分を表すものであって，冪（べき）（2 乗，3 乗，等）とは何も関係はない．

ガウスの不変距離の（I.3.1）は，$u=x^1$ および $v=x^2$ とすると，リーマン形式では

$$ds^2=g_{11}(dx^1)^2+2g_{12}dx^1dx^2+g_{22}(dx^2)^2 \tag{I.3.7}$$

と書かれ，ここで

$$g_{11}=E,\ \ g_{12}=g_{21}=F,\ \ g_{22}=G \tag{I.3.8}$$

である．

物理的不変距離

ローレンツ変換における ds^2（I.2.7）は，すでに述べたように，四次元空間におけるレッキとした距離であり（2 節の「不変距離」の項），リーマン幾何学における不変距離として扱うことのできるものである．リーマン形式（I.3.6）に記号を合わせ，座標 x^μ の四つの成分は $\mu=1,2,3,4$ ではなく，$\mu=0,1,2,3$ として

*6 すぐあとでみるように，座標 x^μ $(\mu=1,2,\cdots,N)$ とは，通常の三次元空間では，たとえば $x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$ にあたるものである．

$$ct \to x^0,\ \ x \to x^1,\ \ y \to x^2,\ \ z \to x^3 \tag{I.3.9}$$

に置き換えると，(I.2.7) は

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{I.3.10}$$

となり，(I.3.6) と比較することにより

$$g_{00} = 1,\ \ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\ \ g_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu) \tag{I.3.11}$$

を得る．

空間が平らの場合（すなわち，特殊相対性理論の場合)，ds^2 はこのような簡単な形で表現できる．これは，曲面を平面とみなすことのできる微小領域では，不変距離が (I.3.2) で与えられることと同じである．他方，空間が曲がっている場合，$g_{\mu\nu}$ は一般に座標の関数であって，ds^2 は場所によって内容が変わってくる．この様子は，二次元曲面の場合を例として，図I.2 に示した．

(I.3.10) の ds^2 は特殊相対性理論（の成立する平らな空間）において見出された関係であるが，ds^2 が不変距離であることは，ガウス-リーマン幾何学にもとづいて，曲がった空間を含む四次元空間において一般に成立する．ただし，ds^2 が (I.3.10) のように表現できるのは，慣性系（特殊相対性理論が成立する系）における直交座標の場合である*7.

4　等価原理

重力質量と慣性質量

ニュートン力学では，二つの物体の質量の比は，根本的に異なる二つの方法を用いて定義される．すなわち，重力質量による方法と慣性質量による方

*7　斜交座標では形式が異なってくる．ただし，$g_{\mu\nu}$ は座標によらず一定である．(I.5.16) 参照.

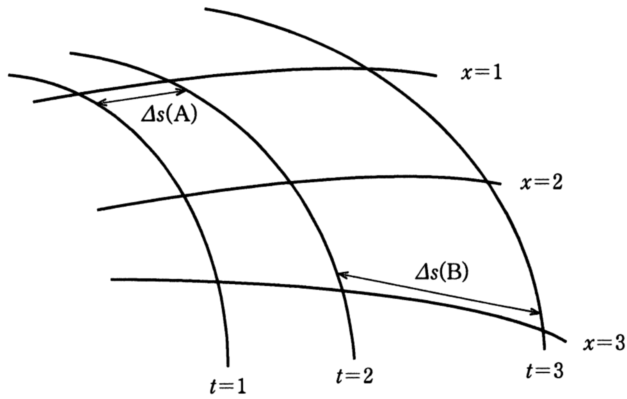


図 I.2　曲面上での距離

二次元曲面上の距離 Δs は（I.3.1）を参照して $\Delta s^2=E\Delta t^2+2F\Delta t\cdot\Delta x+G\Delta x^2$ で与えられる．この式で $\Delta x=0$ (x：一定) とすると，$\Delta s^2=E\Delta t^2$ となるが，E は t と x の関数なので，同じ $\Delta t=1$ であっても Δs は場所により異なる．たとえば，$\Delta s(\mathrm{A})$ と $\Delta s(\mathrm{B})$ はともに $\Delta t=1$（$\Delta x=0$）である．この Δs の変化は，空間の曲がり具合の反映である．

法である．重力質量は万有引力の法則にもとづくもので，その質量の比は，たとえば秤により評価できる．他方の慣性質量は運動の法則（$f=ma$）にもとづく．物体に力（f）が加わるとそれに比例した加速度〔$a=(1/m)f$〕が生じる．その比例定数の逆数が慣性質量（m）である．慣性質量の比は，たとえば理論的には，作用反作用の法則を利用して二つの物体に同一の力を作用させ，それによって生じる加速度の比から評価できる．質量の比がわかれば，基準質量を定めることによって，個々の物体の質量が決定できる．

重力質量と慣性質量は理論的にはまったく独立の概念である．しかし実験的に両者が一致することは，非常に高い精度をもって知られていた．アインシュタインはエトヴェシュ（R. Eötvös, 1848–1919）の実験結果を引用し，そのことを確認している．アインシュタインは，重力質量と慣性質量とは本質的に同じものであると考え，それを「等価仮説」と呼んで彼の理論の基礎とした．この仮説が現在「等価原理」として知られているものである．

等価原理

慣性系では，外力の作用がない物体は静止または等速直線運動を続ける．これは，先に述べたが，「無重力状態」として知られる空間で観察される現象と同じである．無重力状態の空間に固定された座標系は慣性系である．

いま慣性系において適切な大きさの箱を用意し，その中に観測者が入ったあと，何らかの手段により箱を一定の加速度 g で一定の方向に運動させたとする．このとき，箱の中の観測者は，自分および自分の周囲の物体には「下方」（すなわち運動方向とは逆の向き）に加速度 g が作用していることを観測する．そして，仮に観測者が箱の加速度運動のことを知らないとすれば，自分は重力場の中にあって重力を受けていると考えることができる．

他方，箱の外の慣性系に静止している別の観測者にとっては事情が異なる．箱の中の人や物が「落下」するようにみえるのは，人や物が慣性の法則で静止しているのに対し，箱は「上」に向かって運動しているからである．また，箱の中の「重力」というのは，箱の加速度運動によって生じた「慣性力」である．慣性力とは，加速度運動をする乗り物の中で乗客や荷物などに作用するものである．その大きさは，乗り物の加速度を a，作用対象の質量を m とすると，ma であり，その向きは乗り物の加速度とは逆（したがって $-ma$）である*8．慣性力は「系の運動状態により生じるものであって，他の物体との相互作用で生じる本物の力とは異なる」という意味で，「見かけの力」と呼ばれることもある．

等価原理によれば，慣性力と重力とは本質的に同等である*9．すなわち，「箱が加速度運動をしており，そこに生じているのは慣性力である」という主張と「箱は重力場の中にあって重力を受けている」という主張は，物理的に同等である．この等価原理は，物理法則の探究に重要な手がかりを与える．

---

*8　したがって慣性力は，乗り物が加速しているときは後ろ向きに，減速しているときは前向きに作用する．

*9　慣性力は慣性質量に加速度（この場合には g）をかけたもの，重力は重力質量に重力加速度（g）をかけたものである．

重力の「消去」

慣性力と重力が同等であるなら，慣性力によって重力を消去（相殺）することができる．具体的には，重力場の中で自由落下する系では，「下向き」の重力（もともと存在した）と「上向き」の慣性力（落下運動によって生じた）が釣り合い，いわゆる無重力状態＝慣性系となる．慣性系では特殊相対性理論が厳密に成立する．それにより，計量の基本である不変距離 ds^2 を，(I.2.7) により得ることができる．

局所座標系

慣性力と重力の等価性により重力を消去できると書いたが，これには厳重な限定が必要である．重力場は一般に場所（および時間）により変化する．地球の場合を考えても，重力は地球からの距離により変化する．地表付近に限定したとしても，重力の作用する方向は場所によって違う．地球の中心に向かう方向は，場所が変われば平行にはならない．すなわち，自由落下すべき方向がずれる．それどころか，地球の「裏側」では向きは正反対である．したがって，自由落下によって，重力場をそのすべてにわたって消去することはできない．

一般相対性理論では，四次元空間において，(ct,x,y,z) と $(ct+cdt,x+dx,y+dy,z+dz)$ に囲まれた微小領域を扱う．この微小領域は「局所系」といい，(ct,x,y,z) を原点のように考えると，(cdt,dx,dy,dz) が座標の役目をすることになる．この局所系では，いわば「自由落下」によって重力が消去できる．すなわち，重力の効果が消失する系（慣性系）へと座標変換ができるのである．

簡単な具体例はすぐあとでみるが，その手続きを公式的に表現すると，まずその局所系を慣性系へと座標変換する．そこでは空間は平らであり特殊相対性理論が成立するので，(I.2.7) によって ds^2 を得る．そのあとは，微小な平面における不変距離 (I.3.2) をもとにガウスの不変距離 (I.3.1) を導出した手続きと同様にして，空間全体の ds^2 を得ることができる．

慣性系への変換の例

質量 m の物体が，座標系 (ct,x,y,z) において，x 軸方向に一様な重力加速度 g で運動（自由落下）している*10とする．重力がかかり始めたばかりで物体の運動速度は小さく，特殊相対性理論の効果は無視できるとすると，ニュートンの運動方程式（[質量]×[加速度]＝[力]）が

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=0 \tag{I.4.1}$$

と書ける．この式に対し，座標変換

$$T=t,\quad X=x-\frac{g}{2}t^2,\quad Y=y,\quad Z=z \tag{I.4.2}$$

をおこなってみる．

(I.4.2) の X に関する式に着目し，またいまは $T=t$ であることに注意して，X を T について微分すると，

$$\frac{dX}{dT}=\frac{dx}{dt}-gt \tag{I.4.3}$$

これをさらに T で微分すると，

$$\frac{d^2X}{dT^2}=\frac{d}{dT}\frac{dX}{dT}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-gt\right)=\frac{d^2x}{dt^2}-g \tag{I.4.4}$$

ここで，(I.4.1) の最初の関係を考慮すると，

$$\frac{d^2X}{dT^2}=0 \tag{I.4.5}$$

また，(I.4.1) および (I.4.2) の T，Y，Z の式からは明らかに

---

*10　したがって，x の値の大きくなる方向が「下」である．

$$\frac{d^2Y}{dT^2}=\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2Z}{dT^2}=\frac{d^2z}{dt^2}=0 \tag{I.4.6}$$

(I.4.5) と (I.4.6) は，変換後の新しい座標系 (cT, X, Y, Z) では加速度（重力）が存在しないことを意味する．すなわち，この座標系は物体とともに「自由落下」運動をしているので，ここでは慣性力と重力が相殺され，物体に力は作用しない．すなわち，この系は慣性系である．

いま，共通の時刻 $T=t$ において，$X=Y=Z=0$ を含む微小領域で不変距離を求めると，この系では特殊相対性理論が成立するので*11，〔(I.2.7) から〕

$$ds^2=(cdT)^2-(dX)^2-(dY)^2-(dZ)^2 \tag{I.4.7}$$

また，物体は（$T=t$ の瞬間）新しい座標系の原点にあるとすれば $X=Y=Z=0$ であり，そこでは，(I.4.2) の 2 番目の式から

$$x=\frac{g}{2}t^2 \tag{I.4.8}$$

が成立する．同じ (I.4.2) の 2 番目の式によれば X は x と t の関数なので，偏微分の基本公式を用いて*12

$$dX=\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial t}dt \tag{I.4.9}$$

と書くことができ，ここで，(I.4.2) の 2 番目の式から，

$$\frac{\partial X}{\partial x}=1 \tag{I.4.10}$$

および

*11 (I.4.1) を書くとき，特殊相対性理論の効果は無視できるとした．しかし．このような場合でももちろん，(I.4.7) は成立する．2 節の「ガリレイ-ニュートン的力学との対応」の項参照．

*12 (I.3.3) と同じ形式である．

$$\frac{\partial X}{\partial t}=-gt \tag{I.4.11}$$

である．(I.4.8) を t について解いて (I.4.11) に代入すると

$$\frac{\partial X}{\partial t}=-g\sqrt{\frac{2x}{g}}=-\sqrt{2gx} \tag{I.4.12}$$

この式とともに (I.4.10) を (I.4.9) に代入して

$$dX=dx-\sqrt{2gx}\,dt \tag{I.4.13}$$

また，(I.4.2) の 1 番目，3 番目，4 番目の式から得られる

$$dT=dt,\ dY=dy,\ dZ=dz \tag{I.4.14}$$

を (I.4.13) とともに (I.4.7) に代入して整理すると，

$$ds^2=\left(1-\frac{2gx}{c^2}\right)(cdt)^2+\frac{2\sqrt{2gx}}{c}(cdt)dx-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2 \tag{I.4.15}$$

となる．この式を得るまでの過程〔(I.4.7) から (I.4.15)〕は，前節において (I.3.2) から (I.3.4)〔すなわちガウスの不変距離〕を導出した過程と並行している．

一般相対性理論における考察はすべて，(I.4.15) と類似の形式の不変量 ds^2 が基礎になっている．これは，等価原理を利用した手続きが，すでに前提として取り込まれていることを意味する．

座標時と固有時

(I.4.15) において，点 (x,y,z) に固定された時計の進みに着目して $dx=dy=dz=0$ とすると[*13]，

*13　$t\to t+dt, x\to x+dx, y\to y+dy, z\to z+dz$ という変化をさせたときの s の変化が ds である．したがって，(x,y,z) に固定した物体については，$dx=dy=dz=0$ である．

$$ds = \sqrt{1 - \frac{2gx}{c^2}}\, cdt \qquad \text{(I.4.16)}$$

また，静止系 (ct, x, y, z) に対して重力加速度 g で運動する物体についての固有時は，2 節の（I.2.14）より $ds = cd\tau$ なので*14，

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2gx}{c^2}}\, dt \qquad \text{(I.4.17)}$$

を得る．ここで t は，静止系での時間座標であり，「座標時」(2 節の「固有時」の項）である．

いまは，物理現象に対する重力の効果を探究しようとしている．しかし，その探究の手段となるものさし（座標 x, y, z の測定）や時計（座標 t の測定）に重力がどういう効果を及ぼすのかは，あらかじめわかっているわけではない．他方，固有時 $d\tau$ は，運動する慣性系 (cT, X, Y, Z) に固定された時計の進みを静止系で観測したものであり，この固有時と座標時との関係を与えるのが（I.4.17）である．

ところで，（I.4.15）は $gx \geq 0$ を前提にしている．したがって，（I.4.17）からは $d\tau \leq dt$，すなわち重力場（g）が存在することで，座標時の進みは固有時の進みよりも大きくなることがわかる．

5 直線座標系における不変距離

不変距離 ds^2 とそれを構成する $g_{\mu\nu}$ は，一般相対性理論の基盤を提供する．ここでは，通常の（すなわち曲がっていない）二次元平面および三次元空間を対象に，ds^2 と $g_{\mu\nu}$ がどう表現されるのかを考察する．まずは二次元平面での直交座標系で，そこでは（I.3.2）に対応する式〔$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$〕が不変距離を与える．

---

*14 （I.4.7）〔慣性系における関係〕において，$dX = dY = dZ = 0$ かつ $T = \tau$ としたものと同じ．

直交座標系

二次元直交座標系の軸を反時計周りに角度θだけ回転した場合を考える．距離は微分形で表すことにする．そうすると，変換（回転）後の座標(x',y')は，もとの(x,y)と

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta \tag{I.5.1a}$$

$$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta \tag{I.5.1b}$$

あるいは，

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \tag{I.5.2a}$$

$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \tag{I.5.2b}$$

の関係にあることが知られている．ここでは（I.5.2）に着目すると，θは一定として，

$$dx=dx'\cos\theta-dy'\sin\theta \tag{I.5.3a}$$

$$dy=dx'\sin\theta+dy'\cos\theta \tag{I.5.3b}$$

そこで，不変距離

$$\begin{aligned}(dx)^2+(dy)^2&=(dx'\cos\theta-dy'\sin\theta)^2+(dx'\sin\theta+dy'\cos\theta)^2\\&=((dx')^2+(dy')^2)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=(dx')^2+(dy')^2\end{aligned} \tag{I.5.4}$$

を得る．なお，最後の変形では，三角関数の公式

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \tag{I.5.5}$$

を用いた．

変換後の座標系における不変距離を，リーマン形式（I.3.7）に倣って

$$ds^2=g_{11}(dx')^2+2g_{12}dx'dy'+g_{22}(dy')^2 \tag{I.5.6}$$

で定義すると，（I.5.4）との比較から

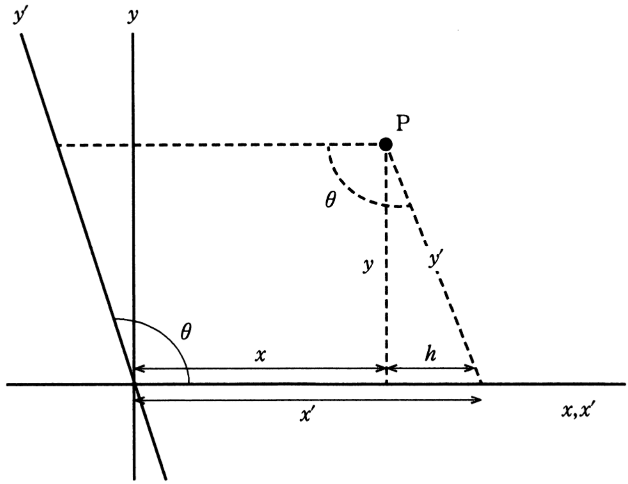


図 I.3　直交座標と斜交座標

ここで，$h=-y'\cos\theta$．また，$x=x'+y'\cos\theta$，$y=y'\sin\theta$ である．

$$g_{11}=1,\quad g_{12}=g_{21}=0,\quad g_{22}=1 \tag{I.5.7}$$

となる．

斜交座標系

もう一つは，図I.3 に示す斜交座標系の場合である．この図から

$$\frac{h}{y'}=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta \tag{I.5.8}$$

ただし，三角関数の公式

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta \tag{I.5.9}$$

を用いた．(I.5.8) から

$$h = -y'\cos\theta \tag{I.5.10}$$

そこで，図から

$$x = x' - h = x' + y'\cos\theta \tag{I.5.11}$$

が決まる．また，同じく図より

$$\frac{y}{y'} = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \tag{I.5.12}$$

なので，三角関数の公式

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \tag{I.5.13}$$

を用いると

$$y = y'\sin\theta \tag{I.5.14}$$

となる．

あとは上で直交座標系についておこなった手続き〔(I.5.3) 以下〕を繰り返せばよい．すなわち，(I.5.11) および (I.5.14) にもとづき，〔また公式 (I.5.5) を用いて〕

$$\begin{aligned}(dx)^2 + (dy)^2 &= (dx' + dy'\cos\theta)^2 + (dy'\sin\theta)^2 \\ &= (dx')^2 + 2dx'dy'\cos\theta + (dy')^2\end{aligned} \tag{I.5.15}$$

これから，(I.5.6) の形式の不変距離を採用すると

$$g_{11} = 1,\ \ g_{12} = g_{21} = \cos\theta,\ \ g_{22} = 1 \tag{I.5.16}$$

を得る．直交座標系の場合〔(I.5.7)〕と比較して，$g_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ の項の存在することが特徴である．

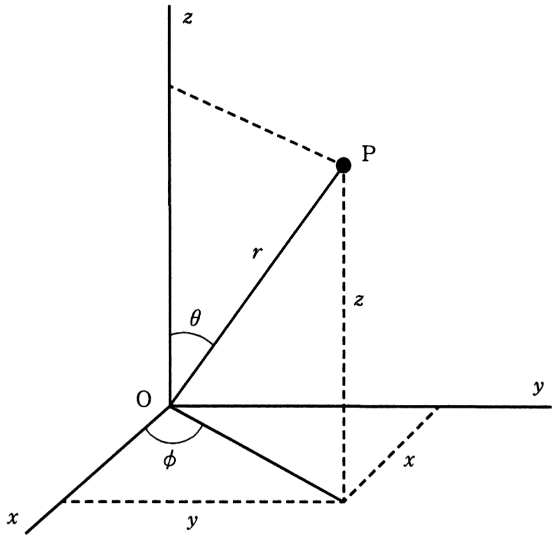


図 I.4　極座標 $(r,\ \theta,\ \phi)$

6 極座標における不変距離

ここでは，通常の三次元空間における極座標を扱う．内容は前節の延長であるが，曲線座標の変換一般に関わる示唆に富むので，節を分けて考察する．変換は $(r,\theta,\phi)\to(x,y,z)$ で，式は次の通り〔図I.4〕．

$$x=r\sin\theta\cos\phi \tag{I.6.1a}$$

$$y=r\sin\theta\sin\phi \tag{I.6.1b}$$

$$z=r\cos\theta \tag{I.6.1c}$$

ここから，座標系 (r,θ,ϕ) における不変距離 ds を求める．

まず，x,y,z のそれぞれは r,θ,ϕ の関数なので，偏微分の公式*15 を用いて，

＊15　9節の「偏微分」の項参照．

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi \tag{I.6.2a}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi \tag{I.6.2b}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi}d\phi \tag{I.6.2c}$$

ここで，(I.6.1) から

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi,\quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi,\quad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi \tag{I.6.3a}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\phi,\quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\phi,\quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r\sin\theta\cos\phi \tag{I.6.3b}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \tag{I.6.3c}$$

である．なお，計算にあたっては公式

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta,\quad \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta \tag{I.6.4}$$

を用いた．

不変距離は，いまは通常の——すなわち曲がっていない——三次元空間での距離を考えているので，

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{I.6.5}$$

とおき，これに (I.6.2) を代入して整理すると，

$$ds^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2 + 2g_{12}drd\theta + 2g_{13}drd\phi + 2g_{23}d\theta d\phi \tag{I.6.6}$$

ただし，ここで

$$g_{11}=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \tag{I.6.7a}$$

$$g_{22}=\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \tag{I.6.7b}$$

$$g_{33}=\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 \tag{I.6.7c}$$

$$g_{12}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta} \tag{I.6.7d}$$

$$g_{13}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \phi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \phi} \tag{I.6.7e}$$

$$g_{23}=\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \phi}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \phi} \tag{I.6.7f}$$

である．(I.6.7) に (I.6.3) を代入し，公式 (I.5.5) を用いると，非常に簡単になって，

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\theta,\quad g_{12}=g_{13}=g_{23}=0 \tag{I.6.8}$$

これらを (I.6.6) に代入して

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{I.6.9}$$

となる．

7 テンソル

一般相対性理論の数学的基礎はテンソルである．その内容は第II章が担当するとして，ここではその大まかな性質について述べる．

通常の三次元空間のベクトル

テンソルはベクトルの概念を拡張したものである．ベクトルは大きさと方

向をもつ量として習っている．

ベクトル $\boldsymbol{A}$（ここでは，ベクトルを斜体かつ太字とする）を特定の座標系で表現するとき，まずは通常の三次元空間の場合を想定すると，ベクトルの頭（2）と尾（1）の各座標成分の差をとって

$$A_x = x_2 - x_1,\quad A_y = y_2 - y_1,\quad A_z = z_2 - z_1 \tag{I.7.1}$$

と定義し，(A_x, A_y, A_z) と書く．ここで，A_x，A_y，A_z のそれぞれは，ベクトルの x 成分，y 成分，z 成分と呼ばれる．また，ベクトルの大きさ A は，

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \tag{I.7.2}$$

で与えられる*16．

ところで，ベクトルをこのように特定の座標系で記述した場合，ベクトルには重要な性質がある．それは，「ベクトルは座標の微小変位と同じ形式で座標変換される」ということである．あるいは，そのような性質をもつ量がベクトルである．すなわち，いま座標系 (x,y,z) から (x',y',z') への変換を考えると，両者の関係は

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial y}dy + \frac{\partial x'}{\partial z}dz \tag{I.7.3}$$

等（このほかに dy' および dz' に関する式がある）で表される．そして，ベクトルは座標の微小変位，すなわち dx, dy, dz と同じ形式で座標変換されるというのだから，

$$A_x' = \frac{\partial x'}{\partial x}A_x + \frac{\partial x'}{\partial y}A_y + \frac{\partial x'}{\partial z}A_z \tag{I.7.4}$$

等（このほかに A_y' および A_z' に関する式がある）のように変換されることになる．

この性質がなぜ重要なのか．ベクトルの方程式は基本的に

*16　ベクトルについての初等的な事柄は，著者による『原論文で学ぶ　アインシュタインの相対性理論』ちくま学芸文庫（2012）の第I章3–6節参照．

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \tag{I.7.5}$$

という形式を有する*17．ベクトルどうしが等しいということは，ベクトルの対応する成分がすべて等しいことを意味する．すなわち，$\boldsymbol{B}$ の成分を (B_x, B_y, B_z) とすると，（I.7.5）は

$$A_x=B_x,\ \ A_y=B_y,\ \ A_z=B_z \tag{I.7.6}$$

である．ここで，（I.7.4）を参照すれば，

$$B_x{}'=\frac{\partial x'}{\partial x}B_x+\frac{\partial x'}{\partial y}B_y+\frac{\partial x'}{\partial z}B_z \tag{I.7.7}$$

等（このほかに $B_y{}'$ および $B_z{}'$ に関する式がある）が成立し，（I.7.6）を考慮すると，

$$A_x{}'=B_x{}',\ \ A_y{}'=B_y{}',\ \ A_z{}'=B_z{}' \tag{I.7.8}$$

となって，変換後も（I.7.5）が成立する．すなわち，ベクトルの方程式（I.7.5）はあらゆる座標系において成立するのである．

四次元空間の場合

四次元空間 (ct,x,y,z) の場合を考えてみる．ここでは，成分が一つ増えただけで，上に述べたことと何も変わりはない．（I.3.9）の記号を採用すると，座標の微小変位はまとめて dx^μ（$\mu=0,1,2,3$）と書くことができる．「座標の微小変位と同じ形式で座標変換される」のがベクトルなので，この dx^μ 自身も定義上ベクトルである．

いま $(ct,x,y,z)\to(ct',x',y',z')$ の座標変換を考え，これを $x^\mu\to x^{\mu'}$ と略記する．ダッシュ（′）は x に付けるよりも μ に付けたほうが便利なことは，あとでテンソルの座標変換規則を扱うときに理解できるであろう．そうすると，座標の微小変位の変換は

*17　この式は形式的に $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=0$ と書ける．この右辺の0は，すべての成分が0のベクトル（ゼロ・ベクトル）である．

$$dx^{0'} = \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^3} dx^3 \qquad \text{(I.7.9)}$$

等（このほかに $dx^{1'}$，$dx^{2'}$，$dx^{3'}$ に関する式がある）によっておこなわれる．そして，ベクトルは座標の微小変位 dx^μ と同じ形式で座標変換されるので，$A^{\mu'}$ の各成分（$\mu'=0,1,2,3$）は，

$$A^{0'} = \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} A^0 + \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^3} A^3 \qquad \text{(I.7.10)}$$

等（このほかに $A^{1'}$，$A^{2'}$，$A^{3'}$ に関する式がある）により記述されることになる．

付け加えておけば，速度ベクトル（I.2.15）および（I.2.16）は，座標の微小変位を不変量（座標変換で変化しない量）で割ったものであり，定義からして「ベクトル」である．

テンソル

テンソルは，このベクトルの概念を拡張したものである．ベクトルは添字が一つだけ（上の場合は μ）であるが，テンソルは一つ以上の添字をもち，たとえば添字二つの場合は $T^{\mu\nu}$ のように書かれる．これは 2 階のテンソルと呼ばれる．この表現を用いれば，ベクトルは 1 階のテンソル，不変量（スカラー）は 0 階のテンソルである．

ベクトルの成分の数は空間の次元と同じなので四次元空間では四つであるが，テンソルの成分の数は，四次元空間の 2 階テンソルの場合添字には 4×4 の組合せがあるので 16 個である．テンソルの添字の位置は上とは限らない（ベクトルも同様）．下の場合もあれば（たとえば，$T_{\mu\nu}$），上下混在すること（たとえば，$T^\mu{}_\nu$ あるいは $T_\mu{}^\nu$）もある．座標変換に伴うテンソルの変換規則は，添字の数および位置により異なる．

一般相対性理論では，物理法則はテンソル方程式で記述される．この方程式は，テンソルの和や差で構成され，それらテンソルはすべて「同種のテンソル」，すなわち（たとえば，$T^{\mu\nu}$ に対する $Y^{\mu\nu}$ のように）階数が同じで，

同じ位置に同じ記号の添字をもつ．同種のテンソルは同一の規則によって座標変換され，変換後も同種のテンソルになる．

テンソルの各成分は，座標の微小変位と同じ形式で座標変換される．したがって，テンソル方程式は，ベクトルの方程式と同じで，あらゆる座標系において成立する．物理法則がテンソル方程式で表現されていれば，それは「すべての座標系において同じ形式で記述される」こと（1節）が保証される．これが，一般相対性理論の数学的基礎がテンソルであることの理由である．

8 ベクトル解析および関連方程式

本書で用いられるベクトルに関わる定理および方程式をまとめておく．ここでは，三次元空間での一般の表記法にしたがう．以下の諸式を「公式」とすることで，本書でのベクトル解析の記述はすべて理解できる．

微分演算子

勾配

微分演算子ベクトル ∇ とスカラー関数 ϕ との積

$$\mathrm{grad}\,\phi=\nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{I.8.1}$$

発散

微分演算子ベクトル ∇ とベクトル $\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$ との内積

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{I.8.2}$$

回転

微分演算子ベクトル ∇ とベクトル $\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$ との外積

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{I.8.3}$$

ラプラス演算子

微分演算子ベクトル ∇ と勾配 $\nabla\phi$ との内積

$$\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{I.8.4}$$

ダランベール演算子

時間の 2 階微分の項とラプラス演算子との組合せ（c は光速度）

$$\Box\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial(ct)^2}-\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial(ct)^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{I.8.5}$$

ガウスの定理

ガウスの定理は，あるベクトル $\boldsymbol{A}$ に対し，

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV=\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{I.8.6a}$$

で表現される．ここで $d\boldsymbol{S}$ は体積 V を囲む表面 S の面積要素を表すベクトルで，その大きさは着目する面の面積，方向は面に垂直で体積の外側に向かう．この式は成分で表すと，

$$\int_V\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdydz=\int_S(A_xdydz+A_ydxdz+A_zdxdy) \tag{I.8.6b}$$

ベクトルの微分を用いた方程式

ポアソン方程式

ラプラス演算子を用いた

$$\nabla^2\phi=4\pi\rho \tag{I.8.7a}$$

あるいは

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=4\pi\rho \tag{I.8.7b}$$

ラプラス方程式

ポアソン方程式で $\rho=0$ とした

$$\nabla^2\phi=0 \tag{I.8.8a}$$

あるいは

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{I.8.8b}$$

ダランベール方程式

ダランベール演算子を用いた

$$\Box\phi=0 \tag{I.8.9a}$$

あるいは

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial (ct)^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{I.8.9b}$$

9 微分・積分公式の断片

微小変化

微分は

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} \tag{I.9.1}$$

で定義される．ここで Δx が十分に小さいとみなすことができれば，lim の記号をはずして

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} \tag{I.9.2}$$

と書ける．この両辺に Δx をかけて

$$f(x+\Delta x)-f(x) = \frac{df(x)}{dx}\Delta x \tag{I.9.3}$$

あるいは

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x \tag{I.9.4}$$

を得る．

また，(I.9.3) において微小量 Δx を δx に置き換え，また

$$\delta f(x) = f(x+\delta x) - f(x) \tag{I.9.5}$$

と定義して

$$\delta f(x) = \frac{df(x)}{dx}\delta x \tag{I.9.6}$$

と書くこともある.

合成関数の微分

$$y=f(g(x)) \tag{I.9.7}$$

という関数において dy/dx を求める場合,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dg}\frac{dg}{dx} \tag{I.9.8}$$

という関係が成立する. たとえば,

$$r=(x^2+a^2)^{1/2} \tag{I.9.9}$$

を x で微分する場合,

$$s=x^2+a^2 \tag{I.9.10}$$

とおいて

$$r=s^{1/2},\quad s=r^2 \tag{I.9.11}$$

ここで, 公式 (I.9.8) により

$$\frac{dr}{dx}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dx}=\left(\frac{1}{2}s^{-1/2}\right)\cdot 2x=\left(\frac{1}{2}(r^2)^{-1/2}\right)\cdot 2x=\frac{x}{r} \tag{I.9.12}$$

あるいは

$$y=\log[f(x)] \tag{I.9.13}$$

を x で微分する場合は,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{df}\frac{df}{dx} \tag{I.9.14}$$

ここで, 対数の微分の公式より

$$\frac{dy}{df}=\frac{1}{f(x)} \tag{I.9.15}$$

これを（I.9.14）に代入し記号をもとに戻すと，

$$\frac{d\log[f(x)]}{dx}=f(x)^{-1}\frac{df(x)}{dx} \tag{I.9.16}$$

を得る．

もう一つの例としては，

$$y=e^{f(x)} \tag{I.9.17}$$

を x で微分する場合，指数関数の微分の公式により

$$\frac{dy}{df}=e^{f(x)} \tag{I.9.18}$$

これを（I.9.14）に代入し記号をもとに戻すと，

$$\frac{de^{f(x)}}{dx}=e^{f(x)}\frac{df(x)}{dx} \tag{I.9.19}$$

となる．

積の微分

関数 f および g において，ある変数によるその微分をそれぞれ f' および g' と書くことにすると，積の微分の公式は

$$(fg)'=f'g+fg' \tag{I.9.20}$$

を与える．三つ以上の関数の積の場合は，この公式を重複して使って，たとえば

$$(fgh)'=((fg)h)'=(f'g+fg')h+(fg)h'=f'gh+fg'h+fgh' \tag{I.9.21}$$

となる.

偏微分

偏微分は，複数の独立変数を含む関数において，着目する変数以外はすべて定数とみなして微分を実行する操作である．たとえば $\partial f(x,y,z)/\partial x$ は，$f(x,y,z)$〔ときに f と略記〕という関数において，x 以外は定数として扱い微分するということである．通常の微分と区別するため，（d という記号の代わりに）∂ が用いられている．ここで関数

$$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dxy+ezy+gzx+h \tag{I.9.22}$$

とすると，

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=2ax+dy+gz \tag{I.9.23}$$

となる.

本書に頻出する偏微分の公式は

$$df(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{I.9.24}$$

というものである．すなわち，$x\to x+dx$，$y\to y+dy$，$z\to z+dz$ の微小変位をさせたときの，関数 $f(x,y,z)$ の変化分 $df(x,y,z)$ を与える式である．(I.9.22) の関数を用いると，

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2by+dx+ez,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2cz+ey+gx \tag{I.9.25}$$

であるから，これらを (I.9.23) とともに (I.9.24) に代入して

$$df(x,y,z)=(2ax+dy+gz)dx+(2by+dx+ez)dy+(2cz+ey+gx)dz \tag{I.9.26}$$

を得る.

積分

本書に出現する積分は主として,

$$\int f(x)'dx=f(x)+C \tag{I.9.27}$$

という形式のものである. ここで, ダッシュは x による微分を表し, また C は積分定数である.

10 連続の方程式

本節は, 主として第Ⅱ章 11 節および 12 節のために, 保存則の背景について説明している. 第Ⅱ章のそれらの節は, テンソルの有用性, とくにマクスウェル方程式がテンソルによっていかに美しく表現できるかを示しているが, そのあとの「第Ⅲ章　重力方程式の展開と応用」の内容には直接は関わらない. したがって, 道を急ぐ読者は本節をスキップすることができる.

ある流体中の体積 V に含まれる物質の質量の時間変化を考える. ここで, 体積 V を囲む表面を S, 流体の密度を ρ, 速度を $\boldsymbol{v}$ とすると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV=-\int_S \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{I.10.1}$$

が成立する. この式の左辺は体積 V 中の質量の時間変化である. 他方, 右辺は単位時間中に表面 S を通過して（体積 V に）流入する質量である. 面積要素 $d\boldsymbol{S}$ は体積に対して外向きが正なので（8 節の「ガウスの定理」の項), 負号を付けて流入を表す.

（I.10.1）の左辺では，微分と積分の順序を入れ替えることが可能である．また右辺は，ガウスの定理（I.8.6a）において $\boldsymbol{A}$ を $\rho\boldsymbol{v}$ に見立て，表面積分を体積積分に変えることができる．そこで，

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = -\int_V \nabla\cdot\rho\boldsymbol{v} dV \tag{I.10.2}$$

この式の右辺を左辺に移項して

$$\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}\right) dV = 0 \tag{I.10.3}$$

この式は任意の体積において成立するので，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{v} = 0 \tag{I.10.4a}$$

あるいは，$\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$ として発散の公式（I.8.2）を用いると

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial\rho v_z}{\partial z} = 0 \tag{I.10.4b}$$

を得る．（I.10.4）は連続の方程式と呼ばれ，質量保存の法則を表す．

電荷保存則も同じ形式で表現され，電荷密度を ρ，電流密度を $\boldsymbol{j}$（$=\rho\boldsymbol{v}$）とすると，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{I.10.5a}$$

あるいは

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \tag{I.10.5b}$$

である．

11 ニュートン・ポテンシャル

質量Mの質点がそこからrだけ離れたところにつくる重力ポテンシャルϕはニュートン・ポテンシャルといわれ，

$$\phi=-\frac{GM}{r} \tag{I.11.1}$$

で与えられる．ここで，Gは万有引力定数である．この重力場における重力加速度gは

$$g=-\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{GM}{r^2} \tag{I.11.2}$$

と算出され，式における負号は加速度がrの減少する方向にあることを示す．この重力場において質量mの質点に作用する力（[質量]×[加速度]）は

$$mg=-\frac{GMm}{r^2} \tag{I.11.3}$$

で，これは万有引力の法則である．負号はrの減少する方向に力が働くこと，すなわち引力であることを表す．

次に，質点Mを原点とする直交座標系(x,y,z)を設定し，重力加速度ベクトルを$\boldsymbol{A}$として，そのx成分A_xを求めてみる．すると，(I.11.2) に対応して

$$A_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \tag{I.11.4}$$

と書ける[*18]．ここで，質量Mは座標系(x,y,z)の原点にあるので，Mからの距離rは

＊18　合成関数の微分の公式（I.9.8）参照．

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \tag{I.11.5}$$

である．そこで，

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\cdot(2x)=\frac{1}{2}(r^2)^{-1/2}\cdot(2x)=\frac{x}{r} \tag{I.11.6}$$

が得られ*19，この式とともに（I.11.2）における関係

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}=\frac{GM}{r^2} \tag{I.11.7}$$

を（I.11.4）に代入すると

$$A_x=-GM\frac{x}{r^3}=-GM\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{I.11.8}$$

となる．

ここでさらに A_x を x で微分する．すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_x}{\partial x}&=-GM\frac{\partial}{\partial x}[x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}]\\&=-GM\left[(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+x\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2x)\right]\\&=-GM[(r^2)^{-3/2}-3x^2(r^2)^{-5/2}]\\&=-GM\frac{r^2-3x^2}{r^5}\end{aligned} \tag{I.11.9}$$

を得る*20．重力加速度の他の成分も同様に計算でき，

$$\frac{\partial A_y}{\partial y}=-GM\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial A_z}{\partial z}=-GM\frac{r^2-3z^2}{r^5} \tag{I.11.10}$$

となる．

*19　式（I.9.12）およびその導出過程参照.

*20　2番目の等号に移るところで積の微分の公式および合成関数の微分の公式を使用.

(I.11.9) および (I.11.10)〔さらに (I.11.5)〕から,

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=-GM\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0 \quad \text{(I.11.11)}$$

すなわち,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \quad \text{(I.11.12)}$$

が成立する*21. また, (I.11.4) の最初の等号を参照すると,

$$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)=\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x},-\frac{\partial\phi}{\partial y},-\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=-\nabla\phi \quad \text{(I.11.13)}$$

である*22. これを (I.11.12) に代入すると*23,

$$\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi=0 \quad \text{(I.11.14)}$$

すなわち, ニュートン・ポテンシャルは, ラプラス方程式 (I.8.8) を満たす.

これは「空っぽの空間」, すなわち重力場は存在するが物質は存在しない(すなわち, 質点 M の外側の) 場合である. 他方, 説明は省略するが, 質量密度 ρ の領域では, ニュートン・ポテンシャルはポアソン方程式 (I.8.7) を満たす.

12 惑星の運動

「水星の近日点の移動」という現象は,「(一般) 相対性理論のもっとも基本的で重要な確証の一つ」(アインシュタイン, 1915) である. ここでは, その背景となる知識について紹介しておく.

---

*21 式 (I.8.2) 参照.
*22 式 (I.8.1) 参照.
*23 式 (I.8.4) 参照.

運動方程式

惑星の運動に関するケプラーの法則は,

第一法則：惑星は太陽を焦点の一方とする楕円軌道を描く,

第二法則：太陽と惑星を結ぶ径が単位時間に描く面積（「面積速度」）は一定である,

第三法則：惑星の公転周期の 2 乗は太陽からの平均距離の 3 乗に比例する,

とまとめることができる．その運動がしたがう方程式は，極座標*[24]で表すと,

$$d\theta=0 \tag{I.12.1}$$

$$r^2\frac{d\phi}{dt}=\alpha \ \text{（一定）} \tag{I.12.2}$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{GM}{\alpha^2} \tag{I.12.3}$$

である．（I.12.1）は，太陽および惑星は常に同一平面上（θ 一定）にあることを意味する．また，（I.12.2）はケプラーの第二法則である．なお，以上において用いられた記号は

α：面積速度の 2 倍を表す定数

r：太陽–惑星間の距離

G：万有引力定数

M：太陽の質量

である．

楕円軌道の長径および短径の各半分をそれぞれ a および b とすれば〔図 I.5〕，上の運動方程式（I.12.3）を満たす解は

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{l}(1+\varepsilon\cos\phi) \tag{I.12.4}$$

*24　6 節参照.

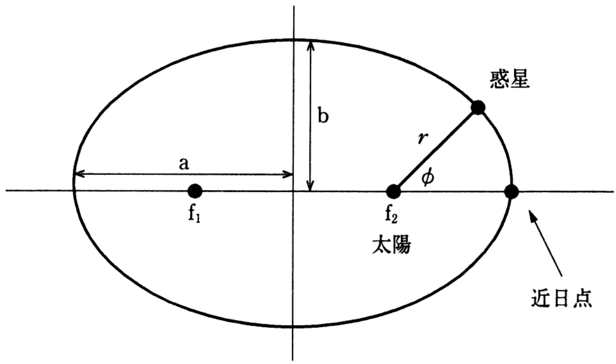


図 I.5　惑星の楕円軌道

太陽は焦点の一方（ここでは f_2）に存在する．楕円軌道は $1/r=(1+\varepsilon\cos\phi)/l$ で表現される．ここで，$\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$ および $l=b^2/a$ である．a および b はそれぞれ長径および短径の各半分，また ε は離心率である．図は各用語の意味を示すことのみを目的に描かれている．

と書け，ここで

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{I.12.5}$$

$$l=\frac{b^2}{a} \tag{I.12.6}$$

である．ε は（楕円の）離心率という名称で知られる量である．この両式より

$$l=a(1-\varepsilon^2) \tag{I.12.7}$$

を得るが，ここで

$$l=\frac{\alpha^2}{GM} \tag{I.12.8}$$

の関係がある.

近日点の移動

以上は，太陽と惑星が孤立して存在する場合の運動方程式である．しかし，惑星の運動は他の惑星からの摂動を受け，その楕円軌道全体は太陽を中心にして，少しずつ回転することが知られている．これは「近日点の移動」と呼ばれる現象である.

近日点は太陽（日）と惑星がもっとも近づく点で，楕円の式（I.12.4）では $\phi=0$ の点である．楕円軌道全体が回転するのだから，それに伴い近日点も移動する．近日点の移動は古くから知られている現象であるが，水星に関しては他の惑星の影響を考慮しても説明できない量の残ることは，ルヴェリエ（U.-J.-J. Leverrier, 1811-1877）以来知られていた．すなわち，水星の近日点の移動は，100 年間に 574 秒*25 であるが，そのうちの 43 秒がどうしても説明できなかったのである．ルヴェリエは，海王星発見に至った彼自身の経験に導かれ，水星と太陽との間に未知の惑星の存在を予言したが，それは発見されなかった．この 43 秒の謎は，アインシュタインの一般相対性理論により解かれたのである.

*25　この秒は角度の単位で，1 度の 1/3600 である.

第 II 章

テンソルの代数

1 テンソルの基本

テンソル代数において新しい定理を見出そうとすれば，他の数学の分野と同様，なかなか困難なことであろう．また，アインシュタイン自身もテンソルには手こずったということをあらためて確認しておいたほうがよい．しかし，本書で必要となるのは新しい定理の発見ではなく，まずは数式の変形を追うことである．そこに存在するのは「困難」などではなく，単なる「面倒」である．テンソル方程式は多数の項からなり，かつその各項が10個近い指数をもつことがある．この面倒くささに耐えられるかどうかだけが（少なくとも本書においては）テンソル理解のポイントである．

微分・積分については，高校以来ほぼ継続して，学習や業務に使ってきたという人はとくにめずらしいものではない．他方，テンソルについては，（特別な人のことは知らないが）誰もが初心者である．記号の奇態さや複雑さに惑わされず，慣れるよう自分自身で十分な演算をしてほしい．一般相対性理論では一般に，これ以外の正道はない．邪道はあるのかも知れないが，結局は理解に至らぬであろう．

本節を含め，以下では，式の変形において，できる限り省略のないよう配慮した．

特殊相対性理論における直交座標系の場合

物理的事象は四つの座標 (ct,x,y,z) で記述される．ここで，

$$ct \to x^0,\ \ x \to x^1,\ \ y \to x^2,\ \ z \to x^3 \qquad (\text{II}.1.1)$$

と置き換え*1，四つの座標は x^μ（$\mu=0,1,2,3$）で表すことにする．いま，この座標の微小変位を dx^μ とすると，特殊相対性理論において見出されたように*2

*1　(I.3.9) と同じ．
*2　(I.3.10) と同じ．

$$ds^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2 \tag{II.1.2}$$

は座標変換に対して不変である.「座標変換に対して不変」というのは,$x^\mu \to x^{\mu'}$ の座標変換*3 において,

$$(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2=(dx^{0'})^2-(dx^{1'})^2-(dx^{2'})^2-(dx^{3'})^2 \tag{II.1.3}$$

が成立するということである.座標変換に対して不変な量は,スカラーと呼ばれる.

ここに四つの量 A^μ ($\mu=0,1,2,3$) があり,dx^μ と同一の形式で座標変換されるとき,A^μ は反変ベクトル(の成分)と呼ばれる*4.この定義によれば,dx^μ 自身も反変ベクトルである.反変ベクトルの大きさの 2 乗は

$$(A^0)^2-(A^1)^2-(A^2)^2-(A^3)^2=(A,A) \tag{II.1.4}$$

で定義される.A^μ は反変ベクトルであり,定義上 dx^μ と同一の形式で座標変換されるというのだから,(II.1.3) を参照すると,

$$\begin{aligned}&(A^0)^2-(A^1)^2-(A^2)^2-(A^3)^2\\&\quad=(A^{0'})^2-(A^{1'})^2-(A^{2'})^2-(A^{3'})^2\end{aligned} \tag{II.1.5}$$

が成立する.したがって,反変ベクトルの大きさ(の 2 乗)は不変量である.

反変ベクトル A^μ と別の反変ベクトル B^μ との積,

$$A^0B^0-A^1B^1-A^2B^2-A^3B^3=(A,B) \tag{II.1.6}$$

は,ベクトル A^μ と B^μ のスカラー積といわれ,これもまた不変量である.これが不変であるのは前章の (I.2.9) の関係にもとづく.すなわち,A^μ ($\mu=0,1,2,3$) の各成分を (cdt_1,dx_1,dy_1,dz_1) の対応する成分,B^μ ($\mu=0,1,2,3$)

---

*3 すなわち,$(ct,x,y,z) \to (ct',x',y',z')$ のことである.

*4 A^μ ($\mu=0,1,2,3$) を全体としてみると反変ベクトルであり,$\mu=0,1,2,3$ の個々の量は反変ベクトルの成分である.なおここでの「dx^μ と同一の形式で座標変換される」という点については,第 I 章 7 節も参照.

の各成分を $(cdt_2, dx_2, dy_2, dz_2)$ の対応する成分に見立てると，

$$\begin{aligned} &A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 \\ &\quad = A^{0'}B^{0'} - A^{1'}B^{1'} - A^{2'}B^{2'} - A^{3'}B^{3'} \end{aligned} \tag{Ⅱ.1.7}$$

が成立するのである．

アインシュタインの規約

反変ベクトル A^μ（添字が上）に対し，共変ベクトル A_μ（添字が下）と呼ばれる量が存在し，その成分は，特殊相対性理論の場合

$$A_0 = A^0,\ \ A_1 = -A^1,\ \ A_2 = -A^2,\ \ A_3 = -A^3 \tag{Ⅱ.1.8}$$

で与えられる*5．これを用いれば，ベクトルの大きさ（Ⅱ.1.4）は，

$$A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3 = (A, A) \tag{Ⅱ.1.9}$$

と書ける．この式の左辺は $A^\mu A_\mu$ と表現される．すなわち，今後このように表現されている場合，

$$A^\mu A_\mu = A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3 \tag{Ⅱ.1.10}$$

と解して，上下一対の同じ記号について和をとるものとする．このような表記を「アインシュタインの規約」と呼ぶ．アインシュタインが使い始めたのである．これに準じて，ベクトルのスカラー積（Ⅱ.1.6）は

$$A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = (A, B) \tag{Ⅱ.1.11}$$

と書くことができる．

二つの反変ベクトル A^μ および B^ν から $A^\mu B^\nu$ という $4\times4=16$ 個の成分をもつ量をつくることができる*6．一般に 16 個の成分からなり，$A^\mu B^\nu$ と同じ形式で座標変換される量は 2 階テンソルと呼んで，たとえば $T^{\mu\nu}$ のように表現する．添字の数が階数である．ベクトルは 1 階のテンソルであり，スカ

*5　この関係はあとで，より一般的な背景から導出される．

*6　ここで ν は，μ と同様，$\nu=0,1,2,3$ の値をとる．

ラーは0階のテンソルである.

テンソルの添字はそれぞれ，ベクトルの場合と同様，上下の移動がある．たとえばベクトル $T^{\mu\nu}$ に対して，$T^{\mu}{}_{\nu}$，$T_{\mu}{}^{\nu}$ あるいは $T_{\mu\nu}$ が存在する．上の位置の添字はテンソルの反変成分，下の添字は共変成分といわれる．添字の上下移動には（あとで述べる）規則が存在し，特殊相対性理論の場合は，個々の添字につき（II.1.8）のように符号が変化する.

テンソル $T_{\mu}{}^{\nu}$ において $\nu=\mu$ とすれば $T_{\mu}{}^{\mu}$ になる．ここには上下一対の同じ記号の添字がある．こういう場合にもアインシュタインの規約を適用して和をとる．そうすると，

$$T_{\mu}{}^{\mu}=T_{0}{}^{0}+T_{1}{}^{1}+T_{2}{}^{2}+T_{3}{}^{3} \tag{II.1.12}$$

すなわち $T_{\mu}{}^{\mu}$ は（$A_{\mu}B^{\mu}$ と同じ形式で座標変換されるので）スカラーである．見かけは2階テンソルであるが，成分は16個ではなく，ただ一つである．$T^{\mu}{}_{\mu}$ の場合も同様である.

添字が三つ以上のテンソルも定義できる．たとえば，$T^{\mu}{}_{\nu\rho}{}^{\sigma}$ である．上でみたように，添字のうち上下の一組を同じ記号，たとえば $T^{\mu}{}_{\nu\rho}{}^{\rho}$ にすると，それ（ρ）について和をとることになる．上下一組の同じ添字はダミーと呼ばれ，ダミーの添字が一組存在するとテンソルの階数は見かけより二つ少ないことになる．上下の添字一組を同じ記号にする操作は**縮約**[*7] といわれる.

各テンソルにおける添字記号は，ダミーを除いて，同じものが二つ以上あってはならない．また，**ダミー添字は必ず上下一組だけである**．したがって，**一つの項に同じ添字記号が3個以上現れてはならない．ダミー添字は，以上の規則に抵触しなければ，常にいかなる文字に置き換えてもよい**.

一般の座標系における不変量

これまでは特殊相対性理論における直交座標系の場合を扱った．一般の座標系においては，不変距離（II.1.2）は

*7　アインシュタインの重力法則は，曲率テンソルを縮約したリッチ・テンソルで表現される（本章9節および10節）.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{Ⅱ.1.13}$$

で与えられる．ここで $g_{\mu\nu}$ は「計量テンソル」あるいは「基本テンソル」と呼ばれる量で，一般には x^μ（$\mu=0,1,2,3$）の関数である．$g_{\mu\nu}$ は添字について対称で

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{Ⅱ.1.14}$$

が成立する．$g_{\mu\nu}$ は一般には 16 個の成分をもつが，この対称性のため独立な成分は 10 個である．（Ⅱ.1.13）の右辺には上下の添字に同じ記号の組があり，それについてはアインシュタインの規約にしたがって和をとる．したがって，（Ⅱ.1.13）はガウス-リーマンの不変距離（Ⅰ.3.6）の四次元バージョンである．

一般の座標系では，ベクトルの大きさを表す（Ⅱ.1.4）あるいは（Ⅱ.1.9）は

$$(A,A) = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \tag{Ⅱ.1.15}$$

で定義される．反変ベクトル A^μ は dx^μ と同一の形式で座標変換される量と定義されているので，この (A,A) は（Ⅱ.1.13）の ds^2 と同様に不変量である．

反変ベクトル A^μ と別の反変ベクトル B^μ とのスカラー積を与える式（Ⅱ.1.6）あるいは（Ⅱ.1.11）は

$$(A,B) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \tag{Ⅱ.1.16}$$

である．これも不変量であり，それは次のように証明される．すなわち，$A^\mu + \lambda B^\mu$ という量を考えると，これは λ がいかなる値であっても，反変ベクトルである．この新しいベクトルの大きさの 2 乗は，（Ⅱ.1.15）により，

$$\begin{aligned} &g_{\mu\nu}(A^\mu + \lambda B^\mu)(A^\nu + \lambda B^\nu) \\ &\quad = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + \lambda (g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu B^\mu) + \lambda^2 g_{\mu\nu} B^\mu B^\nu \end{aligned} \tag{Ⅱ.1.17}$$

この右辺は，λ がいかなる値であっても，不変量でなければならない．第 1 項と第 3 項は，（Ⅱ.1.15）により明らかに不変量である．また，第 2 項のかっ

この中では，ダミー添字は交換（$\mu \leftrightarrow \nu$）できること，および $g_{\mu\nu}$ は対称であること〔(Ⅱ.1.14)〕を考慮すると

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}+g_{\mu\nu}A^{\nu}B^{\mu}=2g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} \qquad \text{(Ⅱ.1.18)}$$

であるから，$g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}$ は不変量でなければならないことがわかる．

（Ⅱ.1.13）と（Ⅱ.1.2）を比較することにより，特殊相対性理論における直交座標系については，

$$g_{00}=1,\ \ g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1,\ \ g_{\mu\nu}=0\ \ (\mu \neq \nu) \qquad \text{(Ⅱ.1.19)}$$

であることがわかる*8．この関係を用いれば，ここで計量テンソルを用いて表現された諸式〔不変距離（Ⅱ.1.13），ベクトルの大きさ（Ⅱ.1.15），ベクトルのスカラー積（Ⅱ.1.16)〕は，対応する前節の諸式〔(Ⅱ.1.2)，(Ⅱ.1.4)，(Ⅱ.1.6)〕と一致することが確認できる．

共変ベクトルの定義

特殊相対性理論における直交座標系では，共変ベクトル A_{μ} は反変ベクトル A^{μ} を用いて（Ⅱ.1.8）で与えられた．他方，一般の座標系の場合 A_{μ} は

$$A_{\mu}=g_{\mu\nu}A^{\nu} \qquad \text{(Ⅱ.1.20)}$$

で定義される．

ここで，特殊相対性理論の場合の計量テンソルの値（Ⅱ.1.19）が与えられたときの（Ⅱ.1.20）の関係をみると，たとえば $\mu=1$ の場合，この式は

$$A_{1}=g_{1\nu}A^{\nu} \qquad \text{(Ⅱ.1.21)}$$

であって，ここで ν について和をとるのであるが，(Ⅱ.1.19）によれば $\nu=1$ 以外の項はすべて 0 なので

$$A_{1}=g_{11}A^{1}=-A^{1} \qquad \text{(Ⅱ.1.22)}$$

---

*8　この値は（I.3.11）と同じである．

となり，先の（Ⅱ.1.8）の関係を与えるのである（他成分についても同様）．

（Ⅱ.1.20）について添字の「バランス」を確認する．（Ⅱ.1.20）の右辺は全体として一つのテンソルを構成する．ダミー添字が1組あるので，「本物」の添字は共変成分の μ だけである．したがって，添字の数，位置および記号は，左辺の1階テンソル（共変ベクトル）と一致している．

記号 g^{ρ}_{μ}

（Ⅱ.1.20）は逆に解くことができる．その結果を

$$A^{\nu}=g^{\mu\nu}A_{\mu} \tag{Ⅱ.1.23}$$

と書く．$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ と同様，添字について対称（$g^{\mu\nu}=g^{\nu\mu}$）である．以降本書では，$g_{\mu\nu}$ を共変計量テンソル，$g^{\mu\nu}$ を反変計量テンソルと呼ぶことにする．

（Ⅱ.1.20）の右辺に（Ⅱ.1.23）を代入してみる．ここで，うっかり

$$A_{\mu}=g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}A_{\mu} \tag{Ⅱ.1.24}$$

とすると，「一つの項に同じ添字記号が3個以上現れてはならない」という先に述べた規則（「アインシュタインの規約」の項）に抵触する．そこで（Ⅱ.1.23）におけるダミー添字 μ を他の記号，たとえば ρ に置き換え，

$$A_{\mu}=g_{\mu\nu}g^{\rho\nu}A_{\rho} \tag{Ⅱ.1.25}$$

を得る．

（Ⅱ.1.25）の右辺は，一度上げた添字をもとに戻す操作であるから，それは常に A_{μ} そのものに等しい．そのためには，右辺において

$$g_{\mu\nu}g^{\rho\nu}=g^{\rho}_{\mu} \tag{Ⅱ.1.26}$$

であることが必要で，この右辺に現れた新しい記号は

$$\begin{aligned} g^{\rho}_{\mu}&=1\ (\mu=\rho)\\ &=0\ (\mu\neq\rho) \end{aligned} \tag{Ⅱ.1.27}$$

という性質のものである*9．以降本書では，（Ⅱ.1.26）および（Ⅱ.1.27）を

「計量テンソルの積の公式」と呼ぶことにする.

(Ⅱ.1.26) における記号 g_μ^ρ を使うと,

$$g_\mu^\rho A^\mu = A^\rho \qquad (\text{Ⅱ}.1.28)$$

$$g_\mu^\rho A_\rho = A_\mu \qquad (\text{Ⅱ}.1.29)$$

が成立する.

添字上げ下げの規則

式 (Ⅱ.1.20) は添字を下げるための規則であって, これはテンソルにも適用でき, たとえば,

$$g_{\mu\nu} T^{\sigma\mu\rho} = T^{\sigma}{}_{\nu}{}^{\rho} \qquad (\text{Ⅱ}.1.30)$$

である. また, (Ⅱ.1.23) は添字を上げるための規則であって, たとえば,

$$g^{\mu\nu} T^{\sigma}{}_{\nu}{}^{\rho} = T^{\sigma\mu\rho} \qquad (\text{Ⅱ}.1.31)$$

である.

テンソル $g_{\mu\nu}$ に対して添字を上げる規則を適用すると,

$$g^{\rho\nu} g_{\mu\nu} = g_\mu{}^\rho \qquad (\text{Ⅱ}.1.32)$$

となり, これは計量テンソルの積の公式 (Ⅱ.1.26) と同一の関係を表す. 計量テンソルは対称なので, 添字は上下そろえて書いて (g_μ^ρ として) も不都合は生じない.

$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ の値を計算しておく. ここには 2 組のダミー記号があり, この量はスカラーである. 添字 ν を上げる規則の適用とみれば,

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g_\mu{}^\mu = g_\mu^\mu \qquad (\text{Ⅱ}.1.33)$$

となり, ここで右辺はアインシュタインの規約により和をとることになるが, 記号 g_μ^ρ の性質 (Ⅱ.1.27) を考慮すれば

＊9 この $g_{\mu\nu}$ と $g^{\rho\nu}$ の関係は, 行列式の余因子展開の規則に対応する (→第Ⅳ章 1 節「余因子」).

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=g_{\mu}^{\mu}=g_{0}^{0}+g_{1}^{1}+g_{2}^{2}+g_{3}^{3}=4 \qquad (\text{II}.1.34)$$

である．すなわち，空間の次元と同じ数になる．

また，計量テンソルの積の公式（Ⅱ.1.26）に対して特殊相対性理論の共変計量テンソルの値（Ⅱ.1.19）を適用すると，

$$g^{00}=1,\ \ g^{11}=g^{22}=g^{33}=-1,\ \ g^{\mu\nu}=0\ \ (\mu\neq\nu) \qquad (\text{II}.1.35)$$

となる．これを得るには，まず（Ⅱ.1.26）でアインシュタインの規約による和を直接に書いて，

$$g_{\mu0}g^{\rho0}+g_{\mu1}g^{\rho1}+g_{\mu2}g^{\rho2}+g_{\mu3}g^{\rho3}=g_{\mu}^{\rho} \qquad (\text{II}.1.36)$$

ここで，たとえば$\mu=0$とすると，（Ⅱ.1.19）の関係により，左辺の第2項以下は0となり，

$$g_{00}g^{\rho0}=g_{0}^{\rho} \qquad (\text{II}.1.37)$$

この式の右辺は，記号g_{μ}^{ρ}の性質（Ⅱ.1.27）により$\rho=0$で1，$\rho\neq0$で0．そこで（Ⅱ.1.19）に与えられたg_{00}の値を用いて，$g^{00}=1$，$g^{0\rho}=0$（$\rho\neq0$）を得る．他の成分についても同様に算出できる．

特殊相対性理論における反変計量テンソルの値（Ⅱ.1.35）は，共変計量テンソルの値（Ⅱ.1.19）と比較すると，「特殊相対性理論の場合は，個々の添字につき（Ⅱ.1.8）のように符号が変化する」（「アインシュタインの規約」の項）という添字の上下移動に関する符号変化の規則と一致する．二つの添字をそろって上げれば符号はそのままである．

スカラー積の表記

添字を下げる規則（Ⅱ.1.20）をスカラー積（Ⅱ.1.16）の右辺に適用してみる．すると，

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}=(g_{\mu\nu}A^{\mu})B^{\nu}=A_{\nu}B^{\nu} \qquad (\text{II}.1.38\text{a})$$

あるいは

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}=A^{\mu}(g_{\mu\nu}B^{\nu})=A^{\mu}B_{\mu} \tag{Ⅱ.1.38b}$$

を得る*[10]. これら両式の右辺はともにスカラー積 (A,B) を表す.

2 座標変換

これまでの記述から，座標変換の重要性は理解されているであろう．一般相対性理論では，あらゆる座標変換に対して，ということはあらゆる観測者に対して，同じ形式で記述される物理法則の探究が目的であるからである.

偏微分の記号

座標変換には一般に偏微分が関わる．ここで，Q を座標 x^{μ} の関数として，その偏微分を

$$\frac{\partial Q}{\partial x^{\mu}}=Q_{,\mu} \tag{Ⅱ.2.1}$$

のように表すことにする．慣れるまでは，下の添字にカンマが現れたら，この式の左辺に戻って理解することである.

この表記法（カンマとともに μ を下の添字とすること）はテンソル方程式において，添字のバランスをみる上で有用である．Q の微小変位を δQ で表す．すると

$$\delta Q=\frac{\partial Q}{\partial x^{\mu}}\delta x^{\mu} \tag{Ⅱ.2.2}$$

なので*[11]，上の表記法（Ⅱ.2.1）を用いると

---

*10　$g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}$ の項は，$g_{\mu\nu}$，A^{μ}，B^{ν} という三つの要素の積から構成され，それら要素はそれぞれが一つの量である．したがって，項の中ではそれらの順番を変えることができる.

*11　(I.9.6) と同じ形式である．ただし，(Ⅱ.2.2) の Q は多変数関数である.

$$\delta Q = Q_{,\mu}\delta x^{\mu} \tag{Ⅱ.2.3}$$

となって，添字のバランスしていることがわかる．すなわち，右辺はダミー添字が1組あるだけなので階数は0で，これは左辺の量と対応している．

ベクトルの変換

ここで，$x^{\mu} \to x^{\mu'}$ の座標変換を考える*12．このとき x^{μ} の微小変位 δx^{μ} は

$$\delta x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\delta x^{\mu} = x^{\mu'}{}_{,\mu}\delta x^{\mu} \tag{Ⅱ.2.4}$$

のように変換される*13．したがって，任意の反変ベクトル A^{μ} は，その定義上，δx^{μ} と同じく，

$$A^{\mu'} = x^{\mu'}{}_{,\mu}A^{\mu} \tag{Ⅱ.2.5}$$

のように変換される．逆の座標変換 $x^{\mu'} \to x^{\mu}$ では

$$A^{\mu} = x^{\mu}{}_{,\mu'}A^{\mu'} \tag{Ⅱ.2.6}$$

である．これは（Ⅱ.2.5）において添字の交換 $\mu' \leftrightarrow \mu$ をおこなったものである．

共変ベクトル B_{μ} の変換式は次のようにして導かれる．まず，$A^{\mu}B_{\mu}$ が不変量（スカラー）であること*14から

$$A^{\mu'}B_{\mu'} = A^{\mu}B_{\mu} \tag{Ⅱ.2.7}$$

この式の右辺に（Ⅱ.2.6）を代入して，

$$A^{\mu'}B_{\mu'} = x^{\mu}{}_{,\mu'}A^{\mu'}B_{\mu} \tag{Ⅱ.2.8}$$

これはいかなる $A^{\mu'}$ についても恒等的に成立するので，

---

*12　以降，ダッシュのある成分とない成分とでは座標系が異なることに注意．

*13　（Ⅰ.6.2）はこの形式の具体例の一つである．（Ⅱ.2.4）では $\mu' = 0', 1', 2', 3'$ であり，右辺の μ はダミー添字であるから，アインシュタインの規約により和をとる．なお，（Ⅱ.2.4）をきちんと理解しておくことが，今後の展開を追う上でのキーになる．

*14　（Ⅱ.1.38b）参照．

$$B_{\mu'}=x^{\mu}{}_{,\mu'}B_{\mu} \tag{II.2.9}$$

を得る．（II.2.9）の逆変換は，添字の交換 $\mu' \leftrightarrow \mu$ をおこなって

$$B_{\mu}=x^{\mu'}{}_{,\mu}B_{\mu'} \tag{II.2.10}$$

である．

テンソルの変換

以上で得た諸変換式を参照すれば，添字のバランスさえ考慮すれば，任意のテンソルの変換式を書き下すことができる．たとえば，

$$T^{\lambda'\mu'}{}_{\nu'}=x^{\lambda'}{}_{,\lambda}x^{\mu'}{}_{,\mu}x^{\nu}{}_{,\nu'}T^{\lambda\mu}{}_{\nu} \tag{II.2.11}$$

である．ダミー添字の対応を確認しそれを除けば，右辺と左辺で添字の記号およびその位置は一致している．このような形式で変換される量がテンソルである．

遅ればせながら，「計量テンソル」がテンソルである（テンソルの変換規則を満たす）ことを証明しておこう．まず偏微分の基本的な性質より

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}=g^{\lambda}_{\nu} \tag{II.2.12}$$

この式の左辺は

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \tag{II.2.13}$$

と展開できるので，（II.2.1）の表記法を採用すると，（II.2.12）は

$$x^{\lambda}{}_{,\mu'}x^{\mu'}{}_{,\nu}=g^{\lambda}_{\nu} \tag{II.2.14}$$

この式は形式的に

$$x^{\lambda}{}_{,\lambda'}x^{\nu'}{}_{,\nu}g^{\lambda'}_{\nu'}=g^{\lambda}_{\nu} \tag{II.2.15}$$

とも書け，この変換式は g^{λ}_{ν} がテンソルであることを示している．

ここで，A^{μ} および B^{ν} を任意のベクトルとすると，

$$g_{\mu'\nu'}A^{\mu'}B^{\nu'}=g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}=g_{\mu\nu}x^{\mu}{}_{,\mu'}x^{\nu}{}_{,\nu'}A^{\mu'}B^{\nu'} \qquad (\mathrm{II}.2.16)$$

が成立する．ここで最初の等号では，スカラー積（Ⅱ.1.16）が不変量である（$x^{\mu}\rightarrow x^{\mu'}$ の座標変換で変わらない）ことを用いている．また，2番目の等号では，反変ベクトルの変換式（Ⅱ.2.6）を用いた．（Ⅱ.2.16）は任意の $A^{\mu'}$ および $B^{\nu'}$ について成立するので，右辺および左辺より，

$$g_{\mu'\nu'}=g_{\mu\nu}x^{\mu}{}_{,\mu'}x^{\nu}{}_{,\nu'} \qquad (\mathrm{II}.2.17)$$

が得られ，これは $g_{\mu\nu}$ がテンソルであることを示している．

また，S をスカラーとし，これは4つの x^{μ} あるいは4つの $x^{\mu'}$ の関数であるとすると*15，偏微分の公式から

$$\frac{\partial S}{\partial x^{\mu'}}=\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \qquad (\mathrm{II}.2.18)$$

が成立し，ここで（Ⅱ.2.1）の表記法を用いると，

$$S_{,\mu'}=S_{,\mu}x^{\mu}{}_{,\mu'} \qquad (\mathrm{II}.2.19)$$

であって，$S_{,\mu}$ は（Ⅱ.2.9）と同じ形式で変換される．したがって，スカラーの微分は共変ベクトルをなすことがわかる．

似非テンソル

スカラーの微分は共変ベクトルをなす（前項）．しかし，あとで示すように，テンソル（ベクトル）の微分（たとえば，$A_{\rho,\sigma}$）は，一般にはテンソルではない（→6節）．このように，添字をもって表されるがテンソルではない量は，「似非（えせ）テンソル」と呼ばれる．一般相対性理論では似非テンソルも重要な役割を果たす．たとえば，4節に出現する「クリストッフェル記号」

---

*15　S はスカラー（不変量）なので，座標 x^{μ} で記述しようが，$x^{\mu'}$ で記述しようが，値は同じである．

は似非テンソルである．それは他の量と組み合わさってテンソルを構成するのである．**似非テンソルも，1節の規則にしたがって，添字の上げ下げが可能である．**

商の定理

ある量がテンソルかどうかは，座標変換が（Ⅱ.2.11）のような規則にしたがうかどうかを調べればわかる．あるいは，「商の定理」を用いることもできる．商の定理によれば，或る量（たとえば $R_{\lambda\mu\nu}$）と任意のテンソル（たとえば A^{λ}）からなる量（$A^{\lambda}R_{\lambda\mu\nu}$）がテンソルであれば，その或る量（$R_{\lambda\mu\nu}$）はテンソルである．

すなわち，$A^{\lambda}R_{\lambda\mu\nu}$ はテンソルなので，

$$A^{\lambda}R_{\lambda\mu\nu}=T_{\mu\nu} \tag{Ⅱ.2.20}$$

とおく．座標変換 $x^{\mu}\rightarrow x^{\mu'}$ のあとの各量を $A^{\lambda'}$，$R_{\lambda'\mu'\nu'}$，$T_{\mu'\nu'}$ と表すことにすると，まず（Ⅱ.2.20）より

$$A^{\lambda'}R_{\lambda'\mu'\nu'}=T_{\mu'\nu'} \tag{Ⅱ.2.21}$$

ここで，A^{λ} および $T_{\mu\nu}$ がテンソルであることは前提なので，（Ⅱ.2.11）の変換式を参照して，

$$A^{\lambda'}=x^{\lambda'}{}_{,\lambda}A^{\lambda} \tag{Ⅱ.2.22}$$

$$T_{\mu'\nu'}=x^{\mu}{}_{,\mu'}x^{\nu}{}_{,\nu'}T_{\mu\nu} \tag{Ⅱ.2.23}$$

が成立する．これらを（Ⅱ.2.21）に代入すると，

$$x^{\lambda'}{}_{,\lambda}A^{\lambda}R_{\lambda'\mu'\nu'}=x^{\mu}{}_{,\mu'}x^{\nu}{}_{,\nu'}T_{\mu\nu} \tag{Ⅱ.2.24}$$

この右辺に（Ⅱ.2.20）の $T_{\mu\nu}$ を代入して

$$x^{\lambda'}{}_{,\lambda}A^{\lambda}R_{\lambda'\mu'\nu'}=x^{\mu}{}_{,\mu'}x^{\nu}{}_{,\nu'}A^{\lambda}R_{\lambda\mu\nu} \tag{Ⅱ.2.25}$$

この関係は任意の A^{λ} に対して恒等的に成立するので，

$$x^{\lambda'}{}_{,\lambda} R_{\lambda'\mu'\nu'} = x^{\mu}{}_{,\mu'} x^{\nu}{}_{,\nu'} R_{\lambda\mu\nu} \qquad (\text{II}.2.26)$$

ここで（Ⅱ.2.1）の表記法を想起すると，

$$x^{\lambda}{}_{,\lambda'} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \qquad (\text{II}.2.27)$$

なので，

$$x^{\lambda}{}_{,\lambda'} = (x^{\lambda'}{}_{,\lambda})^{-1} \qquad (\text{II}.2.28)$$

の関係にある．そこで，（Ⅱ.2.26）の両辺に $x^{\lambda}{}_{,\lambda'}$ をかけて

$$R_{\lambda'\mu'\nu'} = x^{\lambda}{}_{,\lambda'} x^{\mu}{}_{,\mu'} x^{\nu}{}_{,\nu'} R_{\lambda\mu\nu} \qquad (\text{II}.2.29)$$

を得るが，これは $R_{\lambda\mu\nu}$ がテンソルであることを示している．

3 平行移動

曲がった空間

アインシュタインは物理的な世界を四次元のリーマン多様体と考えた．これは「リーマン空間」と呼ばれる*16．すなわち，曲がった空間――四次元曲面である．そこでは，x^{μ} とその近傍の $x^{\mu}+dx^{\mu}$ との間の「距離」は，1節における（Ⅱ.1.13）

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

で与えられる．これは「不変距離」と呼ばれる．「不変」とは，すでに述べたように，座標変換に対して不変という意味である．

*16　第Ⅰ章3節の「リーマン空間」の項参照．

「平行」の概念

曲がった空間では平行移動を定義するのが困難である．平行の概念は直線と結びついている．しかし，「曲がった空間における直線」とは何であろうか．あるいは，平面において線分をその延長上に移動させると平行移動になる．他方，曲面上において（曲面内にあるとみなすことのできる十分に微小な）線分をその延長上に移動させると，一般に向きは変化してしまう．すなわち，平行移動にはならない．

N 次元空間からの眺め

平行移動を定義するには，次元のより高い平らな空間から四次元「曲面」を観察すればよい．平らな空間なら，「直線」も「平行」も理解できる．その目的で，N次元空間の直線座標 z^n（$n=1,2,\cdots,N$）を導入する．以後，N次元空間の量の添字はローマ文字（m，n，など）で表し，四次元空間の量を表すギリシア文字と区別する（この記号の区別は重要である）．

N次元空間における隣接した2点間の不変距離は，上に再現した（II.1.13）を参照して

$$ds^2=h_{nm}dz^n dz^m \qquad \text{(II.3.1)}$$

で与えられる．ここで，h_{nm} は平らな N次元空間の直線座標における計量テンソルであり（$g_{\mu\nu}$ とは違って）定数である．四次元曲面（物理的空間）の各点 x^μ は N次元空間中の点でもあり，その座標 y^n が与えられる．また，曲面上の点 y^n は x^μ の関数であり，それを $y^n(x)$ と表現する．y^n は x^μ で微分でき，（II.2.1）の表記法にしたがって

$$\frac{\partial y^n(x)}{\partial x^\mu}=y^n{}_{,\mu} \qquad \text{(II.3.2)}$$

と書くことができる．

曲面上での微小変位 δx^μ については

$$\delta y^n = y^n{}_{,\mu}\delta x^\mu \tag{Ⅱ.3.3}$$

が成立する*17ので，（Ⅱ.3.1）より

$$\delta s^2 = h_{nm}\delta y^n \delta y^m = h_{nm} y^n{}_{,\mu} y^m{}_{,\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu \tag{Ⅱ.3.4}$$

ここで h_{nm} は定数なので右辺において微分記号 $y^n{}_{,\mu}$ を「通過」させ，

$$\delta s^2 = y^n{}_{,\mu}(h_{nm} y^m{}_{,\nu})\delta x^\mu \delta x^\nu = y^n{}_{,\mu} y_{n,\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu \tag{Ⅱ.3.5}$$

とすることができる．ただしここでは，添字を下げる規則を適用した．δs^2 は同時に，

$$\delta s^2 = g_{\mu\nu}\delta x^\mu \delta x^\nu \tag{Ⅱ.3.6}$$

と表現されるので，（Ⅱ.3.5）との比較で

$$g_{\mu\nu} = y^n{}_{,\mu} y_{n,\nu} \tag{Ⅱ.3.7}$$

となる．

いま四次元曲面上の点 x にベクトル A^μ が存在し，それは十分に微小で（Ⅱ.3.3）の δx^μ のオーダーであったとする．すなわち，ベクトル A^μ は曲面内にあるとみなすことができるものとする．このベクトルを N 次元空間からみると，（Ⅱ.3.3）を参照して

$$A^n = y^n{}_{,\mu} A^\mu \tag{Ⅱ.3.8}$$

というベクトルになる．すなわち，A^μ は反変ベクトルなので座標の微小変位と同じ形式で変換される．

ここで，ベクトルを点 x から $x+dx$ に平行移動させることを考える．A^n としてみると，それは平らな N 次元空間のベクトルなので，平行移動させても変化はない（A^n のままである）*18．しかし，曲面との関係では，平行

*17　（Ⅱ.2.4）と類似の形式である．

*18　ベクトルは方向と大きさによって定義されるので，平らな空間では，平行移動による変化はない．各成分はもとのままである．

移動の結果，ベクトルは一般には曲面をはみ出してしまう．そこで，そのベクトルを曲面上に「射影」することで，曲面内のベクトルをつくることにする．射影とは，ベクトルを接線成分と法線成分とに分け，法線成分を無視することである[*19]．

ベクトルの射影

まず，平行移動後の $x+dx$ におけるベクトル A^n を

$$A^n = A^n{}_{\text{接線}} + A^n{}_{\text{法線}} \tag{II.3.9}$$

と書いて，この $A^n{}_{\text{接線}}$ に対応する四次元曲面内のベクトルを K^μ とすると，(II.3.8) の関係から

$$A^n{}_{\text{接線}} = y^n{}_{,\mu}(x+dx)K^\mu \tag{II.3.10}$$

を得る．この K^μ が A^μ の平行移動の結果である．また，$y^n{}_{,\mu}(x+dx)$ は，$y^n{}_{,\mu}$ が移動後の点 $x+dx$ におけるものであることを表現する．

(II.3.9) の $A^n{}_{\text{法線}}$ は $x+dx$ に存在し，それは $x+dx$ における任意の接線方向ベクトルに垂直である．一般に，二つのベクトル v^μ と v^ν が垂直の条件はそのスカラー積 (II.1.16) が 0，すなわち

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0 \tag{II.3.11}$$

であるから[*20]，N 次元空間で $A^n{}_{\text{法線}}$ が接線方向ベクトルに垂直である条件は，N 次元空間の計量テンソルを用いて

$$h_{nm}A^n{}_{\text{法線}}A^m{}_{\text{接線}} = h_{nm}A^n{}_{\text{法線}}\,y^m{}_{,\mu}(x+dx)K^\mu = 0 \tag{II.3.12}$$

と書ける．ここでは (II.3.10) を添字 $(n\to)m$ に変えて使用した．(II.3.12) において，計量テンソル h_{nm} との組み合わせで $y^m{}_{,\mu}(x+dx)$ の添字 m を下げると，右の等号において

*19 法線成分とは曲面に垂直な方向の成分のことである．接線成分と法線成分は互いに垂直である．

*20 これは通常のベクトルのスカラー積（内積）の場合と同じ．

$$A^n{}_{法線}\,y_{n,\mu}(x+dx)K^\mu=0 \tag{Ⅱ.3.13}$$

となるが，この式は曲面内（すなわち四次元空間内）のベクトルであれば K^μ がいかなるものでも成立するので，

$$A^n{}_{法線}\,y_{n,\mu}(x+dx)=0 \tag{Ⅱ.3.14a}$$

を得る[*21]．ここで，あとの都合〔(Ⅱ.3.16) で添字 μ が三つになるのを防ぐこと〕のため，もともとダミーであった添字を $\mu\to\nu$ に置き換え

$$A^n{}_{法線}\,y_{n,\nu}(x+dx)=0 \tag{Ⅱ.3.14b}$$

としておく．

（Ⅱ.3.14b）の関係を考慮し，（Ⅱ.3.9）の両辺に $y_{n,\nu}(x+dx)$ をかけると，

$$A^n y_{n,\nu}(x+dx)=A^n{}_{接線}\,y_{n,\nu}(x+dx) \tag{Ⅱ.3.15}$$

この右辺に（Ⅱ.3.10）を代入して

$$A^n y_{n,\nu}(x+dx)=y^n{}_{,\mu}(x+dx)K^\mu y_{n,\nu}(x+dx) \tag{Ⅱ.3.16}$$

さらにこの右辺で（Ⅱ.3.7）を用いると，（Ⅱ.3.16）は

$$A^n y_{n,\nu}(x+dx)=K^\mu g_{\mu\nu}(x+dx)=K_\nu(x+dx) \tag{Ⅱ.3.17}$$

となる．$g_{\mu\nu}(x+dx)$ は，$x+dx$ における計量テンソルの成分であることを示す．それを用いて $x+dx$ に存在するベクトル K^μ の添字を下げた．

平行移動の定義

（Ⅱ.3.17）の左辺における $y_{n,\nu}(x+dx)$ は，テーラー展開の公式を用いれば[*22]，

---

*21　μ は曲面内の量を表す添字である．

*22　（Ⅰ.9.4）も参照．

$$y_{n,\nu}(x+dx)=y_{n,\nu}(x)+\frac{\partial y_{n,\nu}}{\partial x^\sigma}dx^\sigma+(dx^\sigma\text{ の 2 次以上の項}) \quad (\text{II}.3.18)$$

と書け，ここで dx^σ（微小量）の 2 次以上の項を無視し，またカンマを用いる微分の表記法を徹底すると

$$y_{n,\nu}(x+dx)=y_{n,\nu}(x)+y_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma \quad (\text{II}.3.19)$$

この式を用いて（II.3.17）を書き直すと（右辺と左辺を交換して），

$$K_\nu(x+dx)=A^n(y_{n,\nu}(x)+y_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma) \quad (\text{II}.3.20)$$

この右辺に（II.3.8）を代入すると

$$\begin{aligned}K_\nu(x+dx)&=A^\mu y^n{}_{,\mu}(y_{n,\nu}+y_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma)\\&=A^\mu y^n{}_{,\mu}y_{n,\nu}+A^\mu y^n{}_{,\mu}y_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma\end{aligned} \quad (\text{II}.3.21)$$

この右辺第 1 項は（II.3.7）を用いて

$$A^\mu y^n{}_{,\mu}y_{n,\nu}=g_{\mu\nu}A^\mu=A_\nu \quad (\text{II}.3.22)$$

これを（II.3.21）に代入して

$$K_\nu(x+dx)=A_\nu+A^\mu y^n{}_{,\mu}y_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma \quad (\text{II}.3.23)$$

を得る．

本節ではまず，四次元曲面上の反変ベクトル A^μ を x から $x+dx$ まで平行移動させ，$x+dx$ におけるベクトル K^μ を定義した．その結果得られたのは，共変ベクトル A_ν と K_ν とを関係づける（II.3.23）である[*23]．そこで，この $K_\nu(x+dx)$ を，A_ν が x から $x+dx$ まで平行移動した結果と解釈することにする．少しあとになるが，この（II.3.23）をもとに，不変関係を用いて，A^μ と K^μ を結びつける量が導かれる〔(II.4.32)〕．また，この平行移動の解釈が首尾一貫して通用することは，このあといくつかの場面で確認されるであろ

＊23　あらためて書き出しておくと，$A^\mu g_{\mu\nu}(x)=A_\nu$ および $K^\mu g_{\mu\nu}(x+dx)=K_\nu$ である．

う.

ここで

$$dA_\nu = A^\mu y^n{}_{,\mu} y_{n,\nu,\sigma} dx^\sigma \qquad (\text{II}.3.24)$$

と定義すると，(Ⅱ.3.23) は

$$K_\nu - A_\nu = dA_\nu \qquad (\text{II}.3.25)$$

と書ける．これが x から $x+dx$ への平行移動による A_ν の変化である．(Ⅱ.3.19) では dx^σ の 2 次以上の項が無視されている．したがって，平行なベクトルというのは，2 次のオーダーの誤差で定義されていることになる．

4 クリストッフェル記号

これから「曲率テンソル」を得るまでの比較的に長い過程に入る．アインシュタインの重力方程式は曲率テンソル（あるいはそれにもとづくリッチ・テンソル）により表現される．ここではまず，曲率テンソルの構成成分であるクリストッフェル記号について述べる．

計量テンソルの微分

$g_{\mu\nu} = y^n{}_{,\mu} y_{n,\nu}$ (Ⅱ.3.7) の両辺を x_σ で微分する．今後はすべて，**2 度目の微分のときは第 2 のカンマを省略する**ことにして，

$$g_{\mu\nu,\sigma} = y^n{}_{,\mu\sigma} y_{n,\nu} + y^n{}_{,\mu} y_{n,\nu\sigma} \qquad (\text{II}.4.1)$$

ここでは，積の微分の公式（Ⅰ.9.20）を用いた．

まず，右辺第 1 項の $y^n{}_{,\mu\sigma}$ と $y_{n,\nu}$ のそれぞれに着目する．N 次元空間での添字を上げる規則を用いて

$$y^n{}_{,\mu\sigma} = (h^{nl} y_l)_{,\mu\sigma} \qquad (\text{II}.4.2)$$

と書けるが，h^{nl} は定数なので微分記号を通過させる（つまり，かっこの外

に出す）ことができて

$$y^n{}_{,\mu\sigma}=y_{l,\mu\sigma}h^{nl} \tag{II.4.3}$$

である*24. 同様に，添字を下げる規則により，

$$y_{n,\nu}=y^k{}_{,\nu}h_{kn} \tag{II.4.4}$$

と変形できる．そこで，右辺第１項全体は，(II.4.3) および (II.4.4) を用いて

$$y^n{}_{,\mu\sigma}y_{n,\nu}=y_{l,\mu\sigma}y^k{}_{,\nu}h^{nl}h_{kn}=y_{l,\mu\sigma}y^k{}_{,\nu}h^l_k=y_{n,\mu\sigma}y^n{}_{,\nu} \tag{II.4.5}$$

となる．なお，ここでは計量テンソルの積の公式 (II.1.26) および (II.1.27) を N 次元に一般化して使用し，最後の変形においては $l=k=n$ とした．

(II.4.5) を用いると (II.4.1) は，

$$g_{\mu\nu,\sigma}=y_{n,\mu\sigma}y^n{}_{,\nu}+y_{n,\nu\sigma}y^n{}_{,\mu} \tag{II.4.6}$$

と書くことができる．

第１種のクリストッフェル記号

(II.4.6) の両辺において，順次記号を入れ替えることによって，

$$\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma}+g_{\mu\sigma,\nu}-g_{\nu\sigma,\mu})=y_{n,\nu\sigma}y^n{}_{,\mu} \tag{II.4.7}$$

の成立することがわかる（「面倒」ではあるかも知れないが，容易に確認できる）．なお，微分を２回する場合，微分の順番を変えても結果は変わらないこと，すなわち**カンマのあとの添字は入れ替えが可能**であることには注意が必要である．この性質は今後幾度も使用される．

ここで (II.4.7) の左辺を

*24 積の微分の公式を適用し，h^{nl} は定数なのでその微分は０になることを用いてもよい．

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma}=\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma}+g_{\mu\sigma,\nu}-g_{\nu\sigma,\mu}) \tag{II.4.8}$$

と定義し，これを「第1種のクリストッフェル記号」と名づける．名称はクリストッフェル（E. B. Christoffel, 1829–1900）に由来する．クリストッフェル記号は似非テンソルである．この記号は**後ろ二つの添字について対称**であり，入れ替わっても値は変わらない．この性質は今後幾度も使用される．また，（II.4.8）から

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma}+\Gamma_{\nu\mu\sigma}=g_{\mu\nu,\sigma} \tag{II.4.9}$$

の成立していることも，事務的な計算により確認できる．

ベクトルの平行移動の式（II.3.24）は，（II.4.7）および（II.4.8）から

$$dA_\nu=A^\mu\Gamma_{\mu\nu\sigma}dx^\sigma \tag{II.4.10}$$

と書ける．この式では，（II.3.24）とは異なって，N次元空間の添字（ローマ文字n）がなくなっている．すなわち，クリストッフェル記号によって，ベクトルの平行移動はN次元空間から眺めなくても表現できるようになったのである．

第2種のクリストッフェル記号

クリストッフェル記号としてこのあとよく使用されるのは，1番目の添字を上げた

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma}=g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\sigma} \tag{II.4.11}$$

である．これは「第2種のクリストッフェル記号」といわれる．クリストッフェル記号は似非テンソルであるが，添字の上げ下げはテンソルと同じ規則で可能である．第2種のクリストッフェル記号における**下の二つの添字は対称**であり，交換しても値は変わらない．この性質は今後幾度も使用される．

（II.4.10）の右辺でダミー添字μをλとして

$$dA_\nu = A^\lambda \Gamma_{\lambda\nu\sigma} dx^\sigma = (g^{\mu\lambda} A_\mu) \Gamma_{\lambda\nu\sigma} dx^\sigma = A_\mu g^{\mu\lambda} \Gamma_{\lambda\nu\sigma} dx^\sigma \qquad (\text{II}.4.12)$$

と書ける*25．ここで（Ⅱ.4.11）を用いて

$$dA_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\sigma} A_\mu dx^\sigma \qquad (\text{II}.4.13)$$

を得る．共変ベクトルの平行移動の公式である．

ベクトルの大きさは平行移動で変化しない

ベクトルの大きさは（Ⅱ.1.15）において $g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$ で与えられている．これに添字上下の規則を適用すると，

$$g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = A_\nu A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \qquad (\text{II}.4.14)$$

このベクトルの大きさは，x から $x+dx$ への平行移動において変化しない．以下にそれを示す．

平行移動における変化分を d で表し，積の微分の公式を参照すると，平行移動におけるベクトルの大きさの変化は，（Ⅱ.4.14）において

$$d(g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu) = g^{\mu\nu} A_\mu dA_\nu + g^{\mu\nu} A_\nu dA_\mu + A_\mu A_\nu dg^{\mu\nu} \qquad (\text{II}.4.15)$$

この右辺第 3 項では，$g^{\mu\nu}$ は x^μ の関数なので（Ⅱ.2.3）を参照して

$$dg^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} dx^\sigma \qquad (\text{II}.4.16)$$

と書ける*26．また，（Ⅱ.4.15）の右辺第 1 項および第 2 項では添字を上げると

$$g^{\mu\nu} A_\mu dA_\nu + g^{\mu\nu} A_\nu dA_\mu = A^\nu dA_\nu + A^\mu dA_\mu \qquad (\text{II}.4.17)$$

になり，この式の左辺はそのままに，右辺に（Ⅱ.4.10）を代入すると*27

---

*25 （Ⅱ.1.38b）に関わる脚注参照．

*26 ここでは，微分の記号（σ）を導入するとき，「一つの項に同じ添字記号が 3 個以上現れてはならない」という規則を想起する．

$$g^{\mu\nu}A_\mu dA_\nu + g^{\mu\nu}A_\nu dA_\mu = A^\nu A^\mu \Gamma_{\mu\nu\sigma}dx^\sigma + A^\mu A^\nu \Gamma_{\nu\mu\sigma}dx^\sigma$$
$$= A^\nu A^\mu(\Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\mu\sigma})dx^\sigma = A^\nu A^\mu g_{\mu\nu,\sigma}dx^\sigma \quad (\text{II}.4.18)$$

ただし，最後の変形では（II.4.9）を用いた．ここで，（II.4.15）に（II.4.18）および（II.4.16）を代入すると，

$$d(g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu) = A^\nu A^\mu g_{\mu\nu,\sigma}dx^\sigma + A_\mu A_\nu g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}dx^\sigma$$
$$= (A^\nu A^\mu g_{\mu\nu,\sigma} + A_\mu A_\nu g^{\mu\nu}{}_{,\sigma})dx^\sigma \quad (\text{II}.4.19)$$

に変わる．

ところで，一般に

$$(g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu})_{,\sigma} = g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}g_{\mu\nu} + g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu,\sigma} \quad (\text{II}.4.20)$$

であり，また計量テンソルの積の公式によれば，

$$(g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu})_{,\sigma} = (g^\alpha_\nu)_{,\sigma} = 0 \quad (\text{II}.4.21)$$

である*28から，

$$g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}g_{\mu\nu} + g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu,\sigma} = 0 \quad (\text{II}.4.22)$$

この両辺に $g^{\beta\nu}$ をかけて

$$g^{\beta\nu}g_{\mu\nu}g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma} + g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu,\sigma} = 0 \quad (\text{II}.4.23)$$

この左辺第1項は，計量テンソルの積の公式を用いると，

$$g^{\beta\nu}g_{\mu\nu}g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma} = g^\beta_\mu g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma} = g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} \quad (\text{II}.4.24)$$

したがって，（II.4.23）は

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} + g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu,\sigma} = 0 \quad (\text{II}.4.25)$$

*27　右辺第2項の dA_μ を扱うには，（II.4.10）において $\nu\leftrightarrow\mu$ の記号の置き換えが必要である．ν を μ に置き換えたままであると（II.4.10）の右辺は μ が3個となってしまうので，もとの μ（ダミー添字）は別の記号（ここでは ν）に置き換えるのである．

*28　g^α_ν は0か1（すなわち定数）なので，その微分は0になる．

この両辺に $A_\alpha A_\beta$ をかけて,

$$A_\alpha A_\beta g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}+A_\alpha A_\beta g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu,\sigma}=0 \tag{II.4.26}$$

すなわち,

$$A_\alpha A_\beta g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}+A^\mu A^\nu g_{\mu\nu,\sigma}=0 \tag{II.4.27}$$

この式の左辺第1項でダミー添字 $\alpha\to\mu$, $\beta\to\nu$ の置き換えをおこなうと, これは（II.4.19）の右辺が0であること, すなわち

$$d(g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu)=0 \tag{II.4.28}$$

であり, ベクトルの大きさは平行移動によって変化しないことがわかる. 大きさ0のベクトル（ゼロ・ベクトル）も, 平行移動後は大きさ0のままである.

反変ベクトルの平行移動

（II.4.28）および（II.4.14）から,

$$d(A_\nu A^\nu)=0 \tag{II.4.29}$$

すなわち

$$A^\nu dA_\nu+A_\nu dA^\nu=0 \tag{II.4.30}$$

これを $A_\nu dA^\nu$ について解き,（II.4.13）を用いると

$$A_\nu dA^\nu=-A^\nu dA_\nu=-A^\nu\Gamma^\mu_{\nu\sigma}A_\mu dx^\sigma=-A^\mu\Gamma^\nu_{\mu\sigma}A_\nu dx^\sigma \tag{II.4.31}$$

なお, 最後の変形においてはダミー添字の ν と μ を交換した.（II.4.31）の左右両辺の関係は任意の A_ν について成立しなければならない. そこで,

$$dA^\nu=-\Gamma^\nu_{\mu\sigma}A^\mu dx^\sigma \tag{II.4.32}$$

を得る. これは反変ベクトルの平行移動の公式であり, 共変ベクトルの（II.4.13）と対になるものである.

5 測地線

ここでは，気分転換として，若干物理的な内容になる．

ベクトルの平行移動による経路

座標 x^μ の点が，一つの軌道に沿って動くとする．その場合，x^μ はあるパラメータ τ の関数である．τ の変化によって x^μ はその値を変化させていく．そこで

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}=u^\mu \tag{II.5.1}$$

とおく．ここで u^μ は，x^μ の変化の方向（＝ 進行方向）を向いたベクトルである*29.

軌道の始点が与えられ，その後の運動は u^μ が平行移動するように進むと考える．そうすると，始点とそこでの u^μ が与えられれば，その後の軌道はすべて定まってしまうことになる．u^μ が最初ゼロ・ベクトル（すべての成分が0，すなわち大きさ0のベクトル）であったとすれば，それは平行移動してもゼロ・ベクトルのままである．ここではまず，$u^\mu u_\mu>0$（大きさは正）としておく*30.

この軌道の方程式は，座標系 x^μ におけるベクトル u^μ の平行移動なので，(II.4.32) において $A^\nu \to u^\nu$ として

$$du^\nu+\Gamma^\nu_{\mu\sigma}u^\mu dx^\sigma=0 \tag{II.5.2}$$

で与えられる．ここで x^σ および u^ν の変化 (dx^σ, du^ν) は τ の変化（$d\tau$）によるものであることを明確に表現して

---

*29　dx^μ は反変ベクトルであり（本章1節の「特殊相対性理論における直交座標系の場合」の項），また $d\tau$ はスカラー（不変量，0階のテンソル）なので，左辺全体としては反変ベクトルになる．

*30　$u^\mu u_\mu=g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu>0$ であれば $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu/(d\tau)^2>0$，すなわち $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu>0$ となるので，u^μ は「時間的」である（→第I章2節の「時間的領域と空間的領域」の項）．

$$\frac{du^\nu}{d\tau}+\Gamma^\nu_{\mu\sigma}u^\mu\frac{dx^\sigma}{d\tau}=0 \qquad (\text{II}.5.3)$$

あるいは，この式の u^μ のところに（II.5.1）を代入して

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}+\Gamma^\nu_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}=0 \qquad (\text{II}.5.4)$$

となる．この方程式で表される軌道を「測地線」という．測地線とは一般に，空間内あるいは曲面上の 2 点を結ぶ最短距離の曲線のことで，平らな空間あるいは平面においては直線に対応する．

パラメータ τ の調整と速度ベクトル

（II.5.1）からわかるように，ベクトル u^μ は，パラメータ τ の尺度を変えることで，その大きさを調整できる．ここで，その大きさを 1 にしたとすると，（II.1.15）により，

$$g_{\mu\sigma}u^\mu u^\sigma=1 \qquad (\text{II}.5.5)$$

ここに（II.5.1）を代入すると

$$g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}=1 \qquad (\text{II}.5.6)$$

となり，この両辺に $(d\tau)^2$ をかけて

$$g_{\mu\sigma}dx^\mu dx^\sigma=(d\tau)^2 \qquad (\text{II}.5.7)$$

ここで，$ds^2=g_{\mu\sigma}dx^\mu dx^\sigma$（II.1.13）により，

$$d\tau=ds \qquad (\text{II}.5.8)$$

の成立していることがわかる．すると，（II.5.1）より，u^μ は速度ベクトル

$$v^\mu=\frac{dx^\mu}{ds} \tag{Ⅱ.5.9}$$

である[*31].

したがって，ベクトル u^μ の大きさを1に調整した場合，(Ⅱ.5.3) は $u^\nu \to v^\nu$ および $d\tau \to ds$ とし，また (Ⅱ.5.9) を用いて

$$\frac{dv^\nu}{ds}+\Gamma^\nu_{\mu\sigma}v^\mu v^\sigma=0 \tag{Ⅱ.5.10}$$

となる．また，(Ⅱ.5.4) は $d\tau \to ds$ として，

$$\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+\Gamma^\nu_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}=0 \tag{Ⅱ.5.11}$$

となる．

運動方程式および光の経路

ここで，「重力のほかにはいかなる力も受けない質点の軌道は測地線である」という仮定を導入する．このとき，(Ⅱ.5.11) は運動方程式を与える．

また，「光の経路はゼロ測地線である」と仮定する．ゼロ測地線とは (Ⅱ.5.1) のベクトル u^μ がゼロ・ベクトルの場合に対応する．このとき (Ⅱ.5.5) に対して

$$g_{\mu\sigma}u^\mu u^\sigma=0 \tag{Ⅱ.5.12}$$

なので，(Ⅱ.5.6) に対応して

$$g_{\mu\sigma}dx^\mu dx^\sigma=0 \tag{Ⅱ.5.13}$$

すなわち，$ds^2=g_{\mu\sigma}dx^\mu dx^\sigma$ から

$$ds^2=0 \tag{Ⅱ.5.14}$$

*31　(Ⅰ.2.16) 参照．ここで ds は，「長さ」の次元をもつ固有時と解することができる．

となる*32．そのため，運動方程式として（Ⅱ.5.11）は使うことができない．その場合には，もとに戻って，（Ⅱ.5.4）が経路を与えることになる．

6 共変微分

ニュートンの運動方程式が微分で表現されるように，アインシュタインの重力法則も微分方程式である．ここではテンソルの微分を扱う．テンソルの微分は，一般相対性理論の法則としては，それ自体がテンソルでなければならない．テンソルを構成する微分は「共変微分」と呼ばれる．

ベクトルの微分は似非テンソル

本章2節（「テンソルの変換」の項）では，スカラーの微分は共変ベクトルをなすことがわかった．しかし，ベクトルの微分は一般にはテンソルとならない．たとえば，ベクトル A_μ は，（Ⅱ.2.9）を参照すれば

$$A_{\mu'}=A_\rho x^\rho{}_{,\mu'} \tag{Ⅱ.6.1}$$

のように座標変換される．ここでその両辺を微分すると，

$$\begin{aligned} A_{\mu',\nu'} &= A_{\rho,\nu'}x^\rho{}_{,\mu'}+A_\rho x^\rho{}_{,\mu'\nu'} \\ &= A_{\rho,\sigma}x^\sigma{}_{,\nu'}x^\rho{}_{,\mu'}+A_\rho x^\rho{}_{,\mu'\nu'} \end{aligned} \tag{Ⅱ.6.2}$$

となる．なお，右辺第1項を得るにあたっては，

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial x^{\nu'}}=\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \tag{Ⅱ.6.3}$$

すなわち，

$$A_{\rho,\nu'}=A_{\rho,\sigma}x^\sigma{}_{,\nu'} \tag{Ⅱ.6.4}$$

*32 （Ⅰ.2.7）に $(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=(cdt)^2$〔光速度による位置変化〕を入れると $ds^2=0$ になる．これは特殊相対性理論において得られた関係であるが，ds は不変量なので一般に成立する

の関係を用いた．

テンソルの座標変換の公式（II.2.11）を参照すれば，もし $A_{\rho,\sigma}$ がテンソルであるなら，（II.6.2）の右辺第2項は余計である．すなわち，$A_{\rho,\sigma}$ は似非テンソルである．

なおここで，ベクトル A_μ の（通常の）微分 $A_{\mu,\nu}$ は

$$A_\mu(x+dx)-A_\mu(x)=A_{\mu,\nu}dx^\nu \qquad \text{(II.6.5)}$$

において定義されるものである*33．

微分係数のテンソル化

そこで，ベクトルの微分の手続きを変更する．まず，点 $x+dx$ におけるベクトル $A_\mu(x+dx)$ を考える．これに対し，点 x におけるベクトル $A_\mu(x)$ を点 $x+dx$ まで平行移動させたベクトルは3節における $K_\mu(x+dx)$ であって，これは $A_\mu(x)$ とは（II.3.25）の関係にある．したがって，

$$K_\mu(x+dx)=A_\mu(x)+dA_\mu \qquad \text{(II.6.6)}$$

であり，この右辺に添字記号を適宜変更して（II.4.13）を代入すると，

$$K_\mu(x+dx)=A_\mu(x)+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha dx^\nu \qquad \text{(II.6.7)}$$

ここで，$A_\mu(x+dx)$ と $K_\mu(x+dx)$ との差をとり，（II.6.5）を用いると

$$\begin{aligned}&A_\mu(x+dx)-(A_\mu(x)+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha dx^\nu)\\&\quad=A_\mu(x+dx)-A_\mu(x)-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha dx^\nu=(A_{\mu,\nu}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha)dx^\nu\end{aligned} \qquad \text{(II.6.8)}$$

この式の左辺は，同じ位置におけるベクトル（A_μ）とベクトル（K_μ）の差であり，ベクトルである．また，右辺の dx^ν もベクトルであるから，2節の「商の定理」により右辺の係数 $A_{\mu,\nu}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha$ はテンソルであることがわかる*34．これを

$$A_{\mu:\nu}=A_{\mu,\nu}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha \qquad \text{(II.6.9)}$$

*33　（I.9.3）と同じ形式である．

と定義し，A_μ の共変微分と呼ぶ．この左辺の下の添字「：」が共変微分を表し，通常の微分「,」と区別される．

これを用いると（Ⅱ.6.8）は

$$A_\mu(x+dx)-K_\mu(x+dx)=A_{\mu:\nu}dx^\nu \qquad (\text{Ⅱ}.6.10)$$

になる．

クリストッフェル記号 $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ は計量テンソルの微分の項からなる〔(Ⅱ.4.11) および（Ⅱ.4.8)〕．そして，平らな空間においては計量テンソルが定数なので，$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ は 0 になる．したがってこのとき，(Ⅱ.4.13)〔と（Ⅱ.3.25)〕から，ベクトル A_ν は dx の距離の平行移動をしても変化しないこと〔すなわち，$K_\mu(x+dx)=A_\mu(x)$〕，および（Ⅱ.6.9）から共変微分は通常の微分と一致することがわかる．

積の共変微分

A_μ と別の共変ベクトル B_μ との積の共変微分を

$$(A_\mu B_\nu)_{:\sigma}=A_{\mu:\sigma}B_\nu+A_\mu B_{\nu:\sigma} \qquad (\text{Ⅱ}.6.11)$$

と定義する．この右辺で（Ⅱ.6.9）を用いると，

$$\begin{aligned}(A_\mu B_\nu)_{:\sigma}&=(A_{\mu,\sigma}-\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}A_\alpha)B_\nu+A_\mu(B_{\nu,\sigma}-\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}B_\alpha)\\&=(A_\mu B_\nu)_{,\sigma}-\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}A_\alpha B_\nu-\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}A_\mu B_\alpha\end{aligned} \qquad (\text{Ⅱ}.6.12)$$

となる．

添字二つのテンソル $T_{\mu\nu}$ の共変微分は $A_\mu B_\nu$ の場合と同じ形式で書くことができ[*35]，

$$T_{\mu\nu:\sigma}=T_{\mu\nu,\sigma}-\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}T_{\alpha\nu}-\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}T_{\mu\alpha} \qquad (\text{Ⅱ}.6.13)$$

＊34　変換規則からテンソルであることの証明もできる（→第Ⅳ章 2 節「$A_{\mu:\nu}=A_{\mu,\nu}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha$ の変換」）．なお，ベクトルは一般に位置が異なればその座標変換係数が異なるので，位置の異なるベクトルの和や差はベクトルとならない．(Ⅱ.6.5) の左辺の差はそのため，ベクトルではない．

＊35　$T^{\mu\nu}$ が $A^\mu B^\nu$ と同じ形式で座標変換されること（本章1節の「アインシュタインの規約」の項）と同様，$T_{\mu\nu}$ は $A_\mu B_\nu$ と同じ形式で座標変換される．

である．すなわち，右辺は通常の微分の項と各添字に関する和の項からなる．

この規則は，共変成分を有するすべてのテンソルに拡張できる．スカラーSの場合もこの規則に含まれ，添字はないとみなして，

$$S_{:\sigma}=S_{,\sigma} \qquad (\text{II}.6.14)$$

である*36．

計量テンソルは共変微分に対して「定数」

計量テンソル$g_{\mu\nu}$に（Ⅱ.6.13）を適用すると，

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu:\sigma}&=g_{\mu\nu,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}g_{\alpha\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}g_{\mu\alpha} \\ &=g_{\mu\nu,\sigma}-\Gamma_{\nu\mu\sigma}-\Gamma_{\mu\nu\sigma}=0 \end{aligned} \qquad (\text{II}.6.15)$$

となる．ただし，式の変形には添字を下げる規則および（Ⅱ.4.9）を用いた．（Ⅱ.6.15）によれば，計量テンソルは共変微分に対し，定数のように振舞う．

反変ベクトルの共変微分

公式（Ⅱ.6.11）が二つのベクトルのスカラー積にも適用できると仮定すれば，

$$(A^{\mu}B_{\mu})_{:\sigma}=A^{\mu}{}_{:\sigma}B_{\mu}+A^{\mu}B_{\mu:\sigma} \qquad (\text{II}.6.16)$$

ここで左辺にはスカラーに対する（Ⅱ.6.14），また右辺第2項には（Ⅱ.6.9）を適用すると，

$$(A^{\mu}B_{\mu})_{,\sigma}=A^{\mu}{}_{:\sigma}B_{\mu}+A^{\mu}(B_{\mu,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}B_{\alpha}) \qquad (\text{II}.6.17)$$

この両辺を展開して

$$A^{\mu}{}_{,\sigma}B_{\mu}+A^{\mu}B_{\mu,\sigma}=A^{\mu}{}_{:\sigma}B_{\mu}+A^{\mu}B_{\mu,\sigma}-A^{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}B_{\alpha} \qquad (\text{II}.6.18)$$

ここで，左辺第2項と右辺第2項は相殺して

*36　すでに（Ⅱ.2.19）は，スカラーの微分が共変ベクトルをなすことを示している．

$$A^{\mu}{}_{,\sigma}B_{\mu}=A^{\mu}{}_{:\sigma}B_{\mu}-A^{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}B_{\alpha} \tag{II.6.19}$$

この右辺第2項でダミー添字$\mu\leftrightarrow\alpha$の交換をして，

$$A^{\mu}{}_{,\sigma}B_{\mu}=A^{\mu}{}_{:\sigma}B_{\mu}-A^{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}B_{\mu} \tag{II.6.20}$$

これは任意のB_{μ}について成立するので（共変微分の項を左辺に移して），

$$A^{\mu}{}_{:\sigma}=A^{\mu}{}_{,\sigma}+A^{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} \tag{II.6.21}$$

を得る．これは反変成分に関する共変微分の公式である．

反変成分を二つもつテンソルの場合は，(II.6.21) および (II.6.13)，また添字のバランスを考慮すると

$$T^{\mu\nu}{}_{:\sigma}=T^{\mu\nu}{}_{,\sigma}+\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}T^{\alpha\nu}+\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha}T^{\mu\alpha} \tag{II.6.22}$$

となることがわかる．

公式の一般性

積の共変微分に関する公式

$$(XY)_{:\sigma}=X_{:\sigma}Y+XY_{:\sigma} \tag{II.6.23}$$

はXおよびYがいかなるテンソルであっても成立する．

微分を含む方程式

一般相対性理論においては，物理法則はあらゆる座標系で成立しなければならない．したがって，微分を含む法則は，すべて共変形式で表現されなければならない．

たとえば，スカラーVに対するダランベール方程式$\Box V=0$は，通常の微分では

$$g^{\mu\nu}V_{,\mu\nu}=0 \tag{II.6.24}$$

と表現されるが*37，これは

$$g^{\mu\nu}V_{:\mu:\nu}=0 \qquad (\text{II}.6.25)$$

の共変形式に拡張される.

Vはスカラーなので（Ⅱ.6.14）により

$$V_{:\mu}=V_{,\mu} \qquad (\text{II}.6.26)$$

ここで，$V_{,\mu}$はベクトルなので，（Ⅱ.6.9）を用いて

$$V_{:\mu:\nu}=(V_{:\mu})_{:\nu}=(V_{,\mu})_{:\nu}=V_{,\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V_{,\alpha} \qquad (\text{II}.6.27)$$

これを（Ⅱ.6.25）に代入すると，

$$g^{\mu\nu}(V_{,\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V_{,\alpha})=0 \qquad (\text{II}.6.28)$$

これは共変形式のダランベール方程式が与える関係である.

ベクトルの通常の微分がテンソルではないといっても，通常の微分は式の物理的意味の理解に有用である．一般相対性理論においてそれは常に，共変形式との関連で用いられるのである.

7 曲率テンソル

やっと曲率テンソルの節に到着したが，具体的な物理へと歩むにはまだ若干の過程が必要である.

微分の順序

通常の微分を2回続けておこなったとき，その結果は微分の順番に関係しない．しかし，共変微分では事情が異なる.

スカラーSの微分$S_{:\mu:\nu}$を考えてみる．まず，$S_{:\mu}$は共変ベクトルなのでそれをA_{μ}に見立てて（Ⅱ.6.9）を用いたあと，（Ⅱ.6.14）に注意すると，

＊37　この式は，ダランベール方程式（Ⅰ.8.9）の一般形である．特殊相対性理論の（Ⅱ.1.35）の関係を用いると，（Ⅱ.6.24）は（Ⅰ.8.9b）に一致する.

$$S_{:\mu:\nu}=S_{:\mu,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}S_{:\alpha}=S_{,\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}S_{,\alpha} \tag{II.7.1}$$

であって，この結果はμとνについて対称なので微分の順番に関係しない．

ベクトルA_νの微分$A_{\nu:\rho:\sigma}$については，$A_{\nu:\rho}$を$T_{\nu\rho}$に見立てて（II.6.13）を用いたあと，（II.6.9）に注意すると，

$$\begin{aligned}A_{\nu:\rho:\sigma}&=A_{\nu:\rho,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}A_{\alpha:\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}A_{\nu:\alpha}\\&=(A_{\nu,\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}A_{\alpha})_{,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}(A_{\alpha,\rho}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}A_{\beta})-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}(A_{\nu,\alpha}-\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}A_{\beta})\\&=A_{\nu,\rho\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho,\sigma}A_{\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}A_{\alpha,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}A_{\alpha,\rho}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}A_{\beta}-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}A_{\nu,\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}A_{\beta}\end{aligned} \tag{II.7.2}$$

ここで，右辺第2項のダミー添字αをβに変え，それを第5項および第7項と組み合わせると，それらはA_βで括ることができて

$$A_{\nu:\rho:\sigma}=A_{\nu,\rho\sigma}-A_{\beta}(\Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha})-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}A_{\alpha,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}A_{\alpha,\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}A_{\nu,\alpha} \tag{II.7.3}$$

を得る．

（II.7.3）でρとσを交換して，もとの式との差を求め，新しい記号$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}$を導入すると，

$$A_{\nu:\rho:\sigma}-A_{\nu:\sigma:\rho}=A_{\beta}R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} \tag{II.7.4}$$

ただし，

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}=\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho}-\Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} \tag{II.7.5}$$

である．この結果は，通常の微分は順番に関わらないこと（$A_{\nu,\rho\sigma}=A_{\nu,\sigma\rho}$）および第2種のクリストッフェル記号は下の二つの添字について対称であることを考慮すれば事務的に算出できる．（II.7.4）によれば，共変微分においては，一般に微分の順序によって結果が変わってくる．

曲率テンソル

（II.7.4）の左辺はテンソルであり，右辺のA_βもテンソル（ベクトル）で

ある．この式は任意のA_βに対して成立するので，商の定理から$R^\beta_{\nu\rho\sigma}$もテンソルであることがわかる．この$R^\beta_{\nu\rho\sigma}$がリーマン-クリストッフェル・テンソル，あるいは曲率テンソルである．

テンソルの対称性

（Ⅱ.7.5）から

$$R^\beta_{\nu\rho\sigma}=-R^\beta_{\nu\sigma\rho} \tag{Ⅱ.7.6}$$

および

$$R^\beta_{\nu\rho\sigma}+R^\beta_{\rho\sigma\nu}+R^\beta_{\sigma\nu\rho}=0 \tag{Ⅱ.7.7}$$

の成立を確認することができる．ただし，（ここでもまた）第2種のクリストッフェル記号は下の添字について対称であることに留意が必要である．

（Ⅱ.7.5）において曲率テンソルの上の添字を下げると*38

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=g_{\mu\beta}R^\beta_{\nu\rho\sigma}=g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\sigma,\rho}+g_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\beta_{\alpha\rho}-\langle\rho\sigma\rangle \tag{Ⅱ.7.8}$$

と書ける．ただし$\langle\rho\sigma\rangle$は，先立つすべての項においてρとσを交換したものを表す〔（Ⅱ.7.5）はもともと，ρとσを交換した項の差からなる〕．この式の右辺を変形して，曲率テンソルの対称性を見やすくしたい．

まず，添字を下げる規則および積の微分の公式を考慮すると，一般に

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho}=(g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\sigma})_{,\rho}=g_{\mu\beta,\rho}\Gamma^\beta_{\nu\sigma}+g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\sigma,\rho} \tag{Ⅱ.7.9}$$

が成立するのでこれから

$$g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\sigma,\rho}=\Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho}-g_{\mu\beta,\rho}\Gamma^\beta_{\nu\sigma} \tag{Ⅱ.7.10}$$

を得て，これを（Ⅱ.7.8）の右辺第1項に代入する．次いで，同第2項で$g_{\mu\beta}$により添字を下げ（$g_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\beta_{\alpha\rho}=\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\alpha\rho}$），そのあとダミー添字の$\alpha$を$\beta$に変

*38　曲率テンソルにおける上の添字は，（Ⅱ.7.5）によればクリストッフェル記号における上の添字に対応している．したがって，添字の上げ下げは（Ⅱ.4.11）の規則に合わせて，最初の添字についておこなう．

える（$\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\alpha\rho} \to \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\beta\rho}$）と，（Ⅱ.7.8）は

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=\Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho}-g_{\mu\beta,\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}+\Gamma_{\mu\beta\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}-\langle\rho\sigma\rangle \tag{Ⅱ.7.11}$$

に変わる．ここで，（Ⅱ.4.9）によれば，

$$g_{\mu\beta,\rho}=\Gamma_{\mu\beta\rho}+\Gamma_{\beta\mu\rho} \tag{Ⅱ.7.12}$$

なので，これを（Ⅱ.7.11）の右辺に代入し，整理すると，

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=\Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho}-\Gamma_{\beta\mu\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}-\langle\rho\sigma\rangle \tag{Ⅱ.7.13}$$

となる．

ここで〈$\rho\sigma$〉を具体的に書くと，

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=(\Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho}-\Gamma_{\mu\nu\rho,\sigma})+\Gamma_{\beta\mu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\nu\rho}-\Gamma_{\beta\mu\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} \tag{Ⅱ.7.14}$$

この右辺第 1 項に（Ⅱ.4.8）を用いて，

$$\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}=\frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\rho}-g_{\nu\sigma,\mu\rho}-g_{\mu\rho,\nu\sigma}+g_{\nu\rho,\mu\sigma})+\Gamma_{\beta\mu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\nu\rho}-\Gamma_{\beta\mu\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} \tag{Ⅱ.7.15}$$

を得る．ただし，通常の微分は順番によらないことを考慮した．

（Ⅱ.7.15）においては，次の対称性を見出すことができる．

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=-R_{\nu\mu\rho\sigma} \tag{Ⅱ.7.16}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=R_{\rho\sigma\mu\nu}=R_{\sigma\rho\nu\mu} \tag{Ⅱ.7.17}$$

これらの関係は，計量テンソルとクリストッフェル記号の添字の対称性，および通常の微分は順番によらぬことを考慮すれば，事務的に確認できる．

曲率テンソルは 4 つの添字を有するので，成分の数は形式的には $4^4=256$ であるが，以上に示した対称性により，独立な成分は 20 に減少する．

8 曲率テンソルがゼロの空間

平らな空間

空間が平らであれば計量テンソルがすべて定数になるような座標系を設定できる．曲率テンソル（II.7.5）はクリストッフェル記号からなり，クリストッフェル記号は計量テンソルの微分の項からなる．したがって，空間が平らなら曲率テンソルの成分はすべて0になる．以下では逆に，曲率テンソルが0の場合の空間について考察してみる．その場合には，計量テンソルが定数となるような座標系が設定可能であり，したがって空間は平らであることがわかるであろう．

なお，本節の以下の記述は，それに続く諸節の理解に直接には関わらないので，道を急ぐ読者はスキップが可能である．

ベクトルの平行移動

点 x におけるベクトル A_μ を $x+dx$ まで平行移動し，それからさらに $x+dx+\delta x$ まで移動させた場合と，最初 $x+\delta x$ に平行移動し，次いで $x+\delta x+dx$ まで移動させた場合とを比較すると，曲率テンソルが0であるなら，結果は経路によらない[*39]．すなわち，1次微小量を超えた任意の経路によるベクトルの平行移動は，同一の結果を与える．

これは（曲率テンソルが0であるなら，）平行移動させたベクトル A_μ は，常に移動後の点におけるベクトル A_μ に等しいことを意味する．（II.6.8）の左辺は，点 $x+dx$ におけるベクトル A_μ と，A_μ を x から $x+dx$ まで平行移動させたベクトルとの差である．曲率テンソルが0であるなら，これは任意の dx^ν に対して0になる．すなわち，右辺において

$$A_{\mu,\nu}=\Gamma^\sigma_{\mu\nu}A_\sigma \qquad \text{(II.8.1)}$$

＊39　証明は第IV章3節「ベクトル平行移動の経路依存性」参照．

が成立する．

座標系

ここで S をスカラーとして，$A_\mu = S_{,\mu}$ とおいてみる．2 節でわかったようにスカラーの微分は共変ベクトルになるからである．これを（Ⅱ.8.1）に入れると

$$S_{,\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} S_{,\sigma} \qquad \text{(Ⅱ.8.2)}$$

ここでクリストッフェル記号は下の添字について対称なので，

$$S_{,\mu\nu} = S_{,\nu\mu} \qquad \text{(Ⅱ.8.3)}$$

が成立し，微分方程式（Ⅱ.8.2）は解くことができる*40．そこで，（Ⅱ.8.2）を満たす 4 個の独立なスカラーを新しい座標系での座標成分 $x^{\alpha'}$ に用いるものとする．そうすると，

$$x^{\alpha'}{}_{,\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} x^{\alpha'}{}_{,\sigma} \qquad \text{(Ⅱ.8.4)}$$

が成立する．

計量テンソルは定数

（Ⅱ.2.17）で示したように，計量テンソルは，テンソルとして，

$$g_{\mu\lambda} = g_{\alpha'\beta'} x^{\alpha'}{}_{,\mu} x^{\beta'}{}_{,\lambda} \qquad \text{(Ⅱ.8.5)}$$

と変換される．この両辺を微分すると，

$$g_{\mu\lambda,\nu} = g_{\alpha'\beta',\nu} x^{\alpha'}{}_{,\mu} x^{\beta'}{}_{,\lambda} + g_{\alpha'\beta'} x^{\alpha'}{}_{,\mu\nu} x^{\beta'}{}_{,\lambda} + g_{\alpha'\beta'} x^{\alpha'}{}_{,\mu} x^{\beta'}{}_{,\lambda\nu} \qquad \text{(Ⅱ.8.6)}$$

この右辺第 1 項を左辺に移項し，右辺第 2 項および第 3 項に（Ⅱ.8.4）を用いると，

$$g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\alpha'\beta',\nu} x^{\alpha'}{}_{,\mu} x^{\beta'}{}_{,\lambda} = g_{\alpha'\beta'} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} x^{\alpha'}{}_{,\sigma} x^{\beta'}{}_{,\lambda} + g_{\alpha'\beta'} x^{\alpha'}{}_{,\mu} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} x^{\beta'}{}_{,\sigma} \qquad \text{(Ⅱ.8.7)}$$

＊40　第Ⅳ章 4 節「完全微分」参照．

この右辺の両項に（Ⅱ.8.5）を適用したあと，添字を下げて（Ⅱ.4.9）で変形すると

$$g_{\mu\lambda,\nu}-g_{\alpha'\beta',\nu}x^{\alpha'}{}_{,\mu}x^{\beta'}{}_{,\lambda}=g_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}+g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}=\Gamma_{\lambda\mu\nu}+\Gamma_{\mu\lambda\nu}$$
$$=g_{\mu\lambda;\nu} \tag{Ⅱ.8.8}$$

すなわち，（Ⅱ.8.8）において

$$g_{\alpha'\beta',\nu}x^{\alpha'}{}_{,\mu}x^{\beta'}{}_{,\lambda}=0 \tag{Ⅱ.8.9}$$

が成立する．ここで，ダッシュの付く文字は（Ⅱ.8.4）を満たす特別な座標であるが，ダッシュの付かない文字の座標系は任意である．

（Ⅱ.8.9）が成立するためには

$$g_{\alpha'\beta',\nu}=0 \tag{Ⅱ.8.10}$$

が必要である〔$x^{\alpha'}{}_{,\mu}x^{\beta'}{}_{,\lambda}$ は座標変換の係数（Ⅱ.8.5）であって，0とはならない〕．この関係を用いると，

$$g_{\alpha'\beta',\nu'}=g_{\alpha'\beta',\nu}x^{\nu}{}_{,\nu'}=0 \tag{Ⅱ.8.11}$$

であり*41，新しい座標系での計量テンソルは定数であり，空間は平らである．

9 リッチ・テンソル

リッチ・テンソル

アインシュタインは，彼の重力法則を「リッチ・テンソル」により表現した．リッチ・テンソルは曲率テンソル（Ⅱ.7.5）の二つの添字を縮約*42 して

---

*41　この変形においては，（Ⅱ.6.4）を参照．

*42　上下の添字の一組を同じ記号にする操作（第Ⅱ章1節の「アインシュタインの規約」の項）．これにより，テンソルの階数は二つ減少する．

$$R^{\mu}_{\nu\rho\mu}=R_{\nu\rho} \qquad (\text{II}.9.1)$$

と表現したものである.

(II.7.17) の右辺と左辺に $g^{\mu\sigma}$ をかけると

$$g^{\mu\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}=g^{\mu\sigma}R_{\sigma\rho\nu\mu} \qquad (\text{II}.9.2)$$

これより

$$R^{\sigma}_{\nu\rho\sigma}=R^{\mu}_{\rho\nu\mu} \qquad (\text{II}.9.3)$$

が得られ, (II.9.1) の定義より

$$R_{\nu\rho}=R_{\rho\nu} \qquad (\text{II}.9.4)$$

の成立することがわかる. すなわち, リッチ・テンソルは二つの添字について対称である.

スカラー曲率

リッチ・テンソルをさらに縮約して

$$g^{\nu\rho}R_{\nu\rho}=R^{\rho}_{\rho}=R \qquad (\text{II}.9.5)$$

を定義すると, R はスカラーであって, スカラー曲率あるいは全曲率と呼ばれる量である. リッチ・テンソルは対称なので, 添字は上下に重ねて書くことができる.

具体的中味

リッチ・テンソルの具体的中味は, (II.7.5) において $\alpha\to\beta$, $\beta\to\alpha$, $\sigma\to\alpha$, $\nu\to\mu$, $\rho\to\nu$ と置き換えて

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}=R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}+\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\\&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\end{aligned} \qquad (\text{II}.9.6)$$

を得る. なお, ここの最後の等号における変形では, 第 3 項および第 4 項に

おいてダミー添字 α と β を交換し，クリストッフェル記号は下の添字につき対称であることを考慮した．

この（Ⅱ.9.6）において，リッチ・テンソルの対称性（Ⅱ.9.4）を見やすくし，また次節に用いる式を導出しておこう．右辺第 2 項以下では μ と ν についての対称性は明らかである．以下では第 1 項のみを対象とする．

> 本節の以下の記述は 11 節で用いる式を導出している．11 節はスキップが可能なので，本節の以下の記述も 11 節とともにスキップできる．

第 1 項について，まず（Ⅱ.4.8）を用いて，

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}=g^{\lambda\alpha}\Gamma_{\lambda\mu\alpha}=\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\lambda\mu,\alpha}+g_{\lambda\alpha,\mu}-g_{\mu\alpha,\lambda})$$
$$=\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\lambda\mu,\alpha}-g_{\mu\alpha,\lambda})+\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}g_{\lambda\alpha,\mu} \qquad (Ⅱ.9.7)$$

この右辺第 1 項において，

$$g^{\lambda\alpha}(g_{\lambda\mu,\alpha}-g_{\mu\alpha,\lambda})=g^{\lambda\alpha}g_{\lambda\mu,\alpha}-g^{\lambda\alpha}g_{\alpha\mu,\lambda}=0 \qquad (Ⅱ.9.8)$$

ここでは計量テンソルの対称性を利用し，また 2 番目の等号においては，左辺第 2 項のダミー添字 λ と α を交換した．（Ⅱ.9.8）を考慮すると（Ⅱ.9.7）は

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}=\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}g_{\lambda\alpha,\mu} \qquad (Ⅱ.9.9)$$

となる．

また，行列式の微分に関する公式によれば，$g_{\lambda\alpha}$ を要素とする行列式を g とすると[*43]，

$$g_{,\mu}=gg^{\lambda\alpha}g_{\lambda\alpha,\mu} \qquad (Ⅱ.9.10)$$

＊43　$gg^{\lambda\alpha}$ は $g_{\lambda\alpha}$ の余因子である．第Ⅳ章 1 節「余因子」における（Ⅳ.1.3）参照．

すなわち，（右辺と左辺を入れ替えて）

$$g^{\lambda\alpha}g_{\lambda\alpha,\mu}=g^{-1}g_{,\mu} \tag{II.9.11}$$

この（II.9.11）を（II.9.9）に代入すると

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}=\frac{1}{2}g^{-1}g_{,\mu} \tag{II.9.12}$$

さらに，ここで

$$g^{-1}g_{,\mu}=(\log g)_{,\mu} \tag{II.9.13}$$

なので*44，

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}=\frac{1}{2}(\log g)_{,\mu} \tag{II.9.14}$$

である．

ここであらためて（II.9.6）の右辺第1項に戻ると，

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}=\frac{1}{2}(\log g)_{,\mu\nu} \tag{II.9.15}$$

となり，μ と ν について対称であることが明らかである．

10 アインシュタインの重力法則

ここまでのテンソル解析学は，ほとんど19世紀中に準備が整っていたものである．テンソルに名前がついたリッチ（G. Ricci–Curbastro, 1853–1925）および彼の弟子であるレヴィ–チヴィタ（T. Levi–Civita, 1873–1941）らを含む人々が重要な貢献をした．

*44 （I.9.16）と同じ．

アインシュタインは，これらの業績をベースにして，空っぽの空間における重力法則をリッチ・テンソルにより

$$R_{\mu\nu}=0 \qquad \text{(II.10.1)}$$

と表現した．「空っぽ」というのは，「物質」が存在しないことを意味する．ただし「物質」とは，重力場以外のものすべてのことである．したがって，通常の意味の物質だけでなく，電磁場も「物質」に含まれる．この法則は，アインシュタインが試行錯誤の結果，発見したものである．何か特定の前提から演繹されたものではない．とはいえ，この重力法則の背景については若干のことを述べておく必要がある．

一般相対性理論では，まずは計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を決定しなければならない．それら $g_{\mu\nu}$ を与えるはずのものが，重力法則である．重力法則は当然，その特殊な場合として，平らな空間における特殊相対性理論やニュートン力学を含むものでなければならない．ここで着目されるのが曲率テンソルである．曲率テンソルは $g_{\mu\nu}$ から構成されており，またそれは，8節でみたように，平らな空間においては0である．したがって，まずは曲率テンソル（の各成分）を0とおけば重力法則になるかも知れない．しかしそれは「行き過ぎ」である．すでにみたように，曲率テンソルが0の空間では，$g_{\mu\nu}$ が場所によらず一定であるような座標系が設定でき，したがって平らなだけ*45 である．すなわち，一般相対性理論は特殊相対性理論となってしまって，一般相対性理論を具体的に条件づけるものとはならない．

そこで，重力法則としては，曲率テンソルから導かれたリッチ・テンソルを0とおく，すなわち（II.10.1）とするのが「きわめて自然な要求であろう」（アインシュタイン，1916)．空間が平らであれば（曲率テンソルが0になるので）リッチ・テンソルは0になる．しかし，リッチ・テンソルが0であっても，空間が平らとは限らない．リッチ・テンソルは2階の対称テンソルで

*45　このような平らな空間，すなわち慣性系であっても，それに対して加速度運動をしているような系に座標変換すれば，「見かけ上」の重力が発生する．したがって，空間が平らであるということは，「$g_{\mu\nu}$ が場所によらず一定となるような座標系が設定できる」ということがポイントである．なお，第I章4節でのべた「局所座標系」は，ある1点とその周辺の微小領域において $g_{\mu\nu}$ が一定となるような座標系が設定できるということを主張しており，この違いが重要である．

あり，その成分は10個である．したがって（Ⅱ.10.1）は，2階の対称テンソルである10個の$g_{\mu\nu}$に対して，10個の方程式を与えることができる．

リッチ・テンソルは，（Ⅱ.10.1）を（Ⅱ.9.6）→（Ⅱ.4.11）→（Ⅱ.4.8）とたどっていくと確認できるが，$g_{\mu\nu}$およびその微分から構成されており，(1) $g_{\mu\nu}$の2階（「2回」）を超える微分は含まず，また (2) 2階微分に関しては1次（線形）である（すなわち，2階微分の項の2乗，3乗，……は含まない）．この (1) と (2) はニュートン力学およびラプラス方程式との関係において重要である．というのは，一般相対性理論では，$g_{\mu\nu}$を重力ポテンシャルと考えることができる*46．また一般相対性理論は，その特殊な場合として，ニュートン力学を含んでいなければならない．そして，ニュートンの重力ポテンシャルは，ラプラス方程式を満足する*47からである．ラプラス方程式は2階微分の項からなり，また2階微分に関して1次である．

重力法則（Ⅱ.10.1）がどのようにニュートン力学と対応し，またニュートン力学を超えた宇宙をどのように記述するのかは，次の章で具体的にみることができる．ただし，（Ⅱ.10.1）の中身はきわめて複雑であり，一般にはその正確な解を得るのは困難である．

11 テンソルの発散および回転

本節は，次の12節とともに，テンソルの有用性，とくにマクスウェル方程式がテンソルによっていかに美しく表現できるかを示している．ただし，そのあとの「第Ⅲ章　重力方程式の展開と応用」の内容には直接は関わらないので，道を急ぐ読者は本節をスキップすることができる．

テンソル密度

積分のときに用いられる四次元の体積要素は，

*46　$g_{\mu\nu}$は四次元空間における各位置での空間の曲がり具合に対応する．空間の曲がりは重力によるものなので，$g_{\mu\nu}$は重力ポテンシャルと考えることができる．

*47　（Ⅰ.11.14）参照．

$$dx^{0'}dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'}=Jdx^0dx^1dx^2dx^3 \qquad (\text{Ⅱ}.11.1)$$

のように座標変換される．ここでJは一般にヤコビアンという名称で知られる量である．この関係を簡単に

$$d^4x'=Jd^4x \qquad (\text{Ⅱ}.11.2)$$

と書くことにする．

ヤコビアンはテンソルの座標変換においても用いられ，$g_{\mu\nu}$の変換においては，$g_{\mu\nu}$および$g_{\mu'\nu'}$を要素とする行列式をそれぞれgおよびg'とすると，

$$g=J^2g' \qquad (\text{Ⅱ}.11.3)$$

の関係がある*48．gの値は負である*49．そこで，(Ⅱ.11.3) から

$$\sqrt{-g}=J\sqrt{-g'} \qquad (\text{Ⅱ}.11.4)$$

を得る．

Sをスカラーとすれば，$S=S'$なので，

$$\int S\sqrt{-g}\,d^4x=\int S\sqrt{-g'}\,Jd^4x=\int S'\sqrt{-g'}\,d^4x' \qquad (\text{Ⅱ}.11.5)$$

これは

$$\int S\sqrt{-g}\,d^4x=\text{不変} \qquad (\text{Ⅱ}.11.6)$$

を意味する．ここで，$S\sqrt{-g}$をスカラー密度と名づける．

同様にして，任意のテンソルに対する$T^{\mu\nu\cdots}\sqrt{-g}$をテンソル密度という．ただし，スカラー密度の場合とは異なり，積分

---

*48　第Ⅳ章5節「ヤコビアン」参照．

*49　特殊相対性理論の場合，$g_{\mu\nu}$の行列は，対角要素が1，−1，−1，−1，非対角要素は0なので，$g=-1$である．一般相対性理論においてはこの値は変化するが，0を横切って正の値になることはない．

$$\int T^{\mu\nu\cdots}\sqrt{-g}\,d^4x$$

は一般には不変ではない.

ところで，一般に，

$$\frac{d\sqrt{-g}}{dx^\nu}=\frac{d}{dx^\nu}(-g)^{1/2}=\frac{dg}{dx^\nu}\frac{d}{dg}(-g)^{1/2}$$

$$=\frac{1}{2}(-g)^{-1/2}(-1)\frac{dg}{dx^\nu}=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{dg}{dx^\nu} \qquad (\text{II}.11.7)$$

両辺に $2/\sqrt{-g}$ をかけて右辺と左辺を入れ換えると，

$$\frac{1}{g}\frac{dg}{dx^\nu}=\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{d\sqrt{-g}}{dx^\nu} \qquad (\text{II}.11.8)$$

これを本書の微分形式で表すと，

$$g^{-1}g_{,\nu}=2(\sqrt{-g}\,)^{-1}(\sqrt{-g}\,)_{,\nu} \qquad (\text{II}.11.9)$$

となる.

行列式の微分に関する公式（II.9.10）の両辺に g^{-1} をかけると

$$g^{-1}g_{,\nu}=g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} \qquad (\text{II}.11.10)$$

ただし，添字を $\mu\to\nu$，$\alpha\to\mu$ に変えた．これと（II.11.9）を組み合わせると，

$$2(\sqrt{-g}\,)^{-1}(\sqrt{-g}\,)_{,\nu}=g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} \qquad (\text{II}.11.11)$$

すなわち，

$$(\sqrt{-g}\,)_{,\nu}=\frac{1}{2}(\sqrt{-g}\,)g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} \qquad (\text{II}.11.12)$$

以降 $\sqrt{-g}$ を簡単に $\surd$ と書くことにすると，（II.11.12）から，

$$\surd_{,\nu}=\frac{1}{2}\surd g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} \qquad (\text{Ⅱ}.11.13)$$

を得る.

また，9節の（Ⅱ.9.9）において$\mu\to\nu$，$\alpha\to\mu$として

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} \qquad (\text{Ⅱ}.11.14)$$

これと（Ⅱ.11.13）を組み合わせ，

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}\surd=\surd_{,\nu} \qquad (\text{Ⅱ}.11.15)$$

を得る.

ベクトルの共変的発散

ベクトルA^{μ}の共変的発散*[50]$A^{\mu}{}_{:\mu}$はスカラーである.（Ⅱ.6.21）から，

$$A^{\mu}{}_{:\mu}=A^{\mu}{}_{,\mu}+A^{\nu}\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}=A^{\mu}{}_{,\mu}+\surd^{-1}\surd_{,\nu}A^{\nu} \qquad (\text{Ⅱ}.11.16)$$

ただし，最後の変形には（Ⅱ.11.15）を用いた．左右両辺に$\surd$をかけて，

$$A^{\mu}{}_{:\mu}\surd=A^{\mu}{}_{,\mu}\surd+\surd_{,\nu}A^{\nu} \qquad (\text{Ⅱ}.11.17)$$

これより，（積の微分の公式を考慮して）

$$A^{\mu}{}_{:\mu}\surd=(A^{\mu}\surd)_{,\mu} \qquad (\text{Ⅱ}.11.18)$$

を得る．この式の左辺はスカラーに$\surd$（$=\sqrt{-g}$）をかけたものである．したがってそれはスカラー密度（前項）であり，その積分は（Ⅱ.11.6）により不変量である.

*50　通常の発散は（Ⅰ.8.2）に与えられ，これは本書での記号法によれば，$A^{\mu}{}_{,\mu}$と書くことができる.

保存則

(Ⅱ.11.18) より，もし $A^{\mu}{}_{:\mu}=0$ であれば

$$(A^{\mu}\surd)_{,\mu}=0 \tag{Ⅱ.11.19}$$

であり，これは密度が $A^0\surd$，流束が $A^m\surd$ ($m=1,2,3$) で規定される流体の保存則を与える*51．すなわち，(Ⅱ.11.19) より

$$(A^0\surd)_{,0}+(A^m\surd)_{,m}=0 \tag{Ⅱ.11.20}$$

これより

$$(A^0\surd)_{,0}=-(A^m\surd)_{,m} \tag{Ⅱ.11.21}$$

を得て，この両辺を時刻 x^0 における三次元体積 V に関して積分すると，

$$\int_V (A^0\surd)_{,0}d^3x=-\int_V (A^m\surd)_{,m}d^3x \tag{Ⅱ.11.22}$$

となるが，微分と積分の順序は入れ換えることができるので，左辺は

$$\int_V (A^0\surd)_{,0}d^3x=\left(\int_V A^0\surd d^3x\right)_{,0} \tag{Ⅱ.11.23}$$

と変形でき，これを用いて (Ⅱ.11.22) は

$$\left(\int_V A^0\surd d^3x\right)_{,0}=-\int_V (A^m\surd)_{,m}d^3x \tag{Ⅱ.11.24}$$

になる．右辺の積分は，ガウスの定理*52 により，体積 V の表面を通過する流れの積分で表現できる．そして，その流れがなければ，(Ⅱ.11.24) の値は 0 になり，

*51 (I.10.4) と同じ形式である．$A^0\surd$ は ρ，また $A^m\surd$ は ρv の各成分に対応する．
*52 (I.8.6) 参照．

$$\int_V A^0\sqrt{\ } d^3x = 一定 \qquad (\text{II}.11.25)$$

となる．密度 $A^0\sqrt{\ }$ を体積 V について積分するとその体積中の質量が得られ，(Ⅱ.11.25) はその質量が保存されることを表す．

反対称テンソルの発散

先にベクトル A^μ について得られた結果 (Ⅱ.11.18) は，一般には，二つ以上の添字を有するテンソルには適用できない．例外は反対称テンソルである．$F^{\mu\nu}$ が反対称，すなわち

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \qquad (\text{II}.11.26)$$

の場合，(Ⅱ.6.22) を参照して

$$F^{\mu\nu}{}_{:\sigma} = F^{\mu\nu}{}_{,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}F^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}F^{\mu\rho} \qquad (\text{II}.11.27)$$

であるから，ここで $\sigma=\nu$ として

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}F^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\nu}F^{\mu\rho} \qquad (\text{II}.11.28)$$

となるが，この右辺第 2 項は，ρ と ν について和をとるとき，必ず

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\nu}F^{\rho\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}F^{\nu\rho} = \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}(F^{\rho\nu} + F^{\nu\rho}) \qquad (\text{II}.11.29)$$

の対として現れ（クリストッフェル記号の下の添字の対称性に注意），これは (Ⅱ.11.26) により 0 である．これに加えて，(Ⅱ.11.15) の関係に注意すると，(Ⅱ.11.28) は

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \sqrt{\ }^{-1}\sqrt{\ }_{,\rho}F^{\mu\rho} \qquad (\text{II}.11.30)$$

この両辺に $\sqrt{\ }$ をかけると

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\sqrt{\ } = F^{\mu\nu}{}_{,\nu}\sqrt{\ } + \sqrt{\ }_{,\rho}F^{\mu\rho} \qquad (\text{II}.11.31)$$

となって，

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\sqrt{\ }=(F^{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\nu} \qquad (\text{II}.11.32)$$

を得る．これはベクトル A^{μ} の（II.11.18）に対応する．

ベクトルの共変的回転

共変ベクトル A_{μ} に対しては，（II.6.9）を参照して，

$$A_{\mu:\nu}-A_{\nu:\mu}=(A_{\mu,\nu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}A_{\rho})-(A_{\nu,\mu}-\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}A_{\rho})=A_{\mu,\nu}-A_{\nu,\mu} \qquad (\text{II}.11.33)$$

が成立する．すなわち，共変微分による回転は通常の微分における回転*53に等しい．この関係は，反変ベクトルでは成立しない．

12 電磁場のテンソル

本節は，テンソルの有用性，とくにマクスウェル方程式がテンソルによっていかに美しく表現できるかを示している．ただし，そのあとの「第Ⅲ章　重力方程式の展開と応用」の内容には直接は関わらないので，道を急ぐ読者は本節をスキップすることができる．

マクスウェル方程式

マクスウェル方程式は，基本的に，特殊相対性理論の枠内にある．ここでは，テンソルにより物理法則が実に簡潔に表現される典型例として，マクスウェル方程式を眺める．

マクスウェル方程式は次の形で与えられる．

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=-\mathrm{curl}\,\boldsymbol{E} \qquad (\text{II}.12.1)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0 \qquad (\text{II}.12.2)$$

*53 （I.8.3）参照．

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\mathrm{curl}\,\boldsymbol{H}-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \qquad (\text{II}.12.3)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=4\pi\rho \qquad (\text{II}.12.4)$$

ここで，$\boldsymbol{E}$は電場ベクトル(E^1,E^2,E^3)，$\boldsymbol{H}$は磁場ベクトル(H^1,H^2,H^3)であって，それらはベクトル・ポテンシャル$\boldsymbol{A}(A^1,A^2,A^3)$およびスカラー・ポテンシャル$\phi$と

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\,\phi \qquad (\text{II}.12.5)$$

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A} \qquad (\text{II}.12.6)$$

の関係にある．

なお，ここにおけるベクトルの grad（勾配），div（発散）および curl（回転）は，第Ⅰ章 8 節「ベクトル解析および関連方程式」で示した通常の三次元表示によるものである．

各量の四次元的表現

上のマクスウェル方程式を，四次元形式で表現する．座標は，すでに本章でずっと採用してきた x^μ（$\mu=0,1,2,3$）である．まず，$\boldsymbol{A}$ および ϕ は

$$\kappa^0=\phi \text{ および } \kappa^m=A^m \ (m=1,2,3)^{*54} \qquad (\text{II}.12.7)$$

にしたがって 4 元ベクトルとして扱う．

ここで

$$F_{\mu\nu}=\kappa_{\mu,\nu}-\kappa_{\nu,\mu} \qquad (\text{II}.12.8)$$

を定義すると，（Ⅱ.12.5）の成分 1 は

$$E^1=-\frac{\partial A^1}{c\partial t}-\frac{\partial\phi}{\partial x^1}=-\frac{\partial A^1}{\partial x^0}-\frac{\partial\phi}{\partial x^1}=-\frac{\partial\kappa^1}{\partial x^0}-\frac{\partial\kappa^0}{\partial x^1}$$

＊54　$\mu=0,1,2,3$，また $m=1,2,3$ とする．

$$=\frac{\partial\kappa_1}{\partial x^0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial x^1}=\kappa_{1,0}-\kappa_{0,1}=F_{10}=-F^{10} \qquad (\text{II}.12.9)$$

と書ける*55．他成分（2 および 3）も同様に得ることができる．

また，（II.12.6）の成分 1 は

$$H^1=\frac{\partial A^3}{\partial x^2}-\frac{\partial A^2}{\partial x^3}=\frac{\partial\kappa^3}{\partial x^2}-\frac{\partial\kappa^2}{\partial x^3}$$

$$=-\frac{\partial\kappa_3}{\partial x^2}+\frac{\partial\kappa_2}{\partial x^3}=\kappa_{2,3}-\kappa_{3,2}=F_{23}=F^{23} \qquad (\text{II}.12.10)$$

と書ける．他成分（2 および 3）も同様に得ることができる．

各結果は「成分表」〔表II.1〕にまとめた．すなわち，（II.12.8）の $F_{\mu\nu}$ は反対称テンソルであって，$\mu=\nu$ のとき $F_{\mu\nu}=0$，また $\mu\neq\nu$ のとき $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$ なので，独立な成分は 6 個ある．そして，その $F_{\mu\nu}$ の 6 個の成分が，$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ の成分（各 3 個）を決めていることがわかる．

表II.1　各ベクトルの成分

ポテンシャル κ^μ	(ϕ, A^1, A^2, A^3)
電場 E^m	(F_{10}, F_{20}, F_{30})　$(-F^{10}, -F^{20}, -F^{30})$
磁場 H^m	(F_{23}, F_{31}, F_{12})　(F^{23}, F^{31}, F^{12})
電荷密度・電流密度 J^μ	$(\rho, j^1/c, j^2/c, j^3/c)$

ここで，$\mu=0,1,2,3$，$m=1,2,3$．また $F_{\mu\nu}$ および $F^{\mu\nu}$ は反対称テンソル：$F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$，$F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$，また $\mu=\nu$ のとき $F_{\mu\nu}=F^{\mu\nu}=0$．

方程式のテンソル表現

（II.12.8）によれば，$F_{\mu\nu}$ は一般に

*55　ここでは κ^μ および $F_{\mu\nu}$ の添字の上下移動に注意．特殊相対性理論における添字の上下による符号変化の規則は（II.1.8）に与えられている．複数の添字を有するテンソル（似非テンソルを含む）の場合，この規則は各成分ごとに成立する．すなわち，成分 0 は移動させても符号は変化しない．成分 1, 2, 3 は一つ移動させると符号は変化するが，二つ移動させると変化が相殺して符号はもとのままである．

$$F_{\mu\nu,\sigma}+F_{\nu\sigma,\mu}+F_{\sigma\mu,\nu}=0 \qquad \text{(II.12.11)}$$

を満たすことがわかる．これはマクスウェル方程式のうち（II.12.1）および（II.12.2）を表現する．たとえば，（II.12.1）の成分1は

$$\frac{\partial H^1}{\partial x^0}+\left(\frac{\partial E^3}{\partial x^2}-\frac{\partial E^2}{\partial x^3}\right)=0 \qquad \text{(II.12.12)}$$

であるが，（上の成分表を参照すると）これは（II.12.11）における

$$F_{23,0}+F_{30,2}+F_{02,3}=0 \qquad \text{(II.12.13)}$$

に等しい．あるいは，（II.12.2）は

$$\frac{\partial H^1}{\partial x^1}+\frac{\partial H^2}{\partial x^2}+\frac{\partial H^3}{\partial x^3}=0 \qquad \text{(II.12.14)}$$

であるが，これは

$$F_{23,1}+F_{31,2}+F_{12,3}=0 \qquad \text{(II.12.15)}$$

である．

また，$F^{\mu\nu}$が反対称であって，$F^{00}=0$であることに注意すれば，マクスウェル方程式（II.12.4）は，

$$F^{0\nu}{}_{,\nu}=F^{0m}{}_{,m}=\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho \qquad \text{(II.12.16)}$$

と書ける．

同様にしてマクスウェル方程式（II.12.3）を変形した

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\operatorname{curl}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \qquad \text{(II.12.17)}$$

の左辺の成分1は

$$F^{10}{}_{,0}+F^{12}{}_{,2}+F^{13}{}_{,3}=F^{1\nu}{}_{,\nu} \qquad \text{(II.12.18)}$$

と表現され（$F^{\mu\nu}$の反対称性に注意），したがって（II.12.17）の両辺の成分1は

$$F^{1\nu}{}_{,\nu}=\frac{4\pi}{c}j^1 \quad (\text{II}.12.19)$$

となる．そこで，（II.12.17）は全体として，

$$F^{m\nu}{}_{,\nu}=\frac{4\pi}{c}j^m \quad (\text{II}.12.20)$$

と表現されることがわかる．

電荷密度ρと電流密度j^mは

$$J^0=\rho \text{ および } J^m=j^m/c \quad (\text{II}.12.21)$$

にしたがって4元ベクトルをなす（「成分表」参照）．そこで，（II.12.16）および（II.12.20）〔すなわち，それぞれマクスウェル方程式（II.12.4）および（II.12.3）〕はまとめて，

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu}=4\pi J^\mu \quad \textbf{(II.12.22)}$$

と表現できる．

テンソル形式のマクスウェル方程式

マクスウェル方程式（II.12.1）—（II.12.6）において，$\boldsymbol{E}$および$\boldsymbol{H}$は（II.12.5）および（II.12.6）により$F_{\mu\nu}$で定義され，それらを用いることによって，

（II.12.1）と（II.12.2）→ **(II.12.11)**
（II.12.3）と（II.12.4）→ **(II.12.22)**

の四次元形式で表現された．ここで（II.12.11）は，$F_{\mu\nu}$の定義（II.12.8）からそのまま生じる関係である．

共変形式

一般相対性理論においては，方程式は共変形式でなければならない．四次元形式の中心である反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ は，その定義（Ⅱ.12.8）に対して前節の（Ⅱ.11.33）がそのまま適用でき，

$$F_{\mu\nu}=\kappa_{\mu:\nu}-\kappa_{\nu:\mu} \qquad (\text{Ⅱ}.12.23)$$

と書ける．

また，（Ⅱ.6.13）によれば，

$$F_{\mu\nu:\sigma}=F_{\mu\nu,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}F_{\alpha\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}F_{\mu\alpha} \qquad (\text{Ⅱ}.12.24)$$

であって，これを用いると，（Ⅱ.12.11）から

$$F_{\mu\nu:\sigma}+F_{\nu\sigma:\mu}+F_{\sigma\mu:\nu}=F_{\mu\nu,\sigma}+F_{\nu\sigma,\mu}+F_{\sigma\mu,\nu}=0 \qquad (\text{Ⅱ}.12.25)$$

が成立する．なお，計算にあたっては，$F_{\mu\nu}$ の反対称性およびクリストッフェル記号の対称性を考慮した．これにより，四次元形式でのマクスウェル方程式（Ⅱ.12.11）および（Ⅱ.12.22）のうち，（Ⅱ.12.11）を共変形式に変換できた．

一般相対性理論では，（Ⅱ.12.22）は共変形式の

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu}=4\pi J^{\mu} \qquad (\text{Ⅱ}.12.26)$$

に置き換えられなければならない．これは，6節でダランベール方程式が，共変形式の（Ⅱ.6.25）に置き換えられたことと同じである．（Ⅱ.12.26）に，先に導出した反対称テンソルに関する公式（Ⅱ.11.32）を適用すると，

$$(F^{\mu\nu}\surd)_{,\nu}=F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\surd=4\pi J^{\mu}\surd \qquad (\text{Ⅱ}.12.27)$$

となり，これから

$$(J^{\mu}\surd)_{,\mu}=(4\pi)^{-1}(F^{\mu\nu}\surd)_{,\mu\nu} \qquad (\text{Ⅱ}.12.28)$$

ここで，右辺の $(F^{\mu\nu}\surd)_{,\mu\nu}$ は，μ と ν について和をとると，必ず

$$[(F^{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\mu\nu}+(F^{\nu\mu}\sqrt{\ })_{,\nu\mu}]=[(F^{\mu\nu}+F^{\nu\mu})\sqrt{\ }]_{,\mu\nu} \qquad (\text{II}.12.29)$$

の対として現れ，これは $F_{\mu\nu}$ の反対称性によって 0 になる．したがって，(II.12.28) は

$$(J^{\mu}\sqrt{\ })_{,\mu}=0 \qquad (\text{II}.12.30)$$

これは (II.11.19) と同じ形式であり，電荷の保存則*56 を与えている．

---

*56 (I.10.5) 参照．ただし，(II.12.30) は，(I.10.5) の両辺を c で割ったものに対応する．成分表での電荷密度および電流密度の項参照．

第Ⅲ章

重力方程式の展開と応用

1 ニュートン近似[*1]

静的な重力場における不変距離と計量テンソル

静的な重力場，すなわち時間的に変化しない重力場を考える．そのときは，

$$g_{\mu\nu,0}=0 \tag{Ⅲ.1.1}$$

である．また，静的な重力場では，距離 ds^2（Ⅱ.1.13）は $x^0\to-x^0$ としても変化しないはずである（時間的な変化はないのだから）．ここで，m,n などローマ文字の添字は 1,2,3（すなわち 0 以外）の値をとるとすると，一般に

$$ds^2=g_{00}dx^0dx^0+2g_{0m}dx^0dx^m+g_{mn}dx^mdx^n \tag{Ⅲ.1.2}$$

と書くことができ，これが $x^0\to-x^0$ で不変でなければならないのだから

$$g_{0m}=0 \tag{Ⅲ.1.3}$$

が必要である．そこで，（Ⅲ.1.2）は

$$ds^2=g_{00}dx^0dx^0+g_{mn}dx^mdx^n \tag{Ⅲ.1.4}$$

になる．さらに，計量テンソルの積の公式（Ⅱ.1.26）を用いれば，（Ⅲ.1.3）から

$$g^{0m}=0 \quad \text{および} \quad g^{00}=(g_{00})^{-1} \tag{Ⅲ.1.5}$$

を得る[*2]．

クリストッフェルの記号（Ⅱ.4.8）および（Ⅱ.4.11）において，（Ⅲ.1.1）および（Ⅲ.1.3）の計量テンソルを考慮すれば，ただちに

＊1　本節の記述は，ディラック『一般相対性理論』の「16．ニュートン近似」の枠組みにもとづく．

＊2　$g_{\mu\nu}g^{\rho\nu}=g^{\rho}_{\mu}$（Ⅱ.1.26）において，（Ⅲ.1.3）を考慮すると，$\mu=0$，$\rho\neq0$（ということは $\rho=m$）から $g^{m0}=0$，また $\mu=\rho=0$ から $g_{00}g^{00}=1$ を得る．さらに，必要があれば，（Ⅱ.1.35）～（Ⅱ.1.37）とその関連する本文参照．

$$\Gamma_{m0n}=\Gamma^{m}_{0n}=0 \tag{Ⅲ.1.6a}$$

また，クリストッフェル記号の対称性により，

$$\Gamma_{mn0}=\Gamma^{m}_{n0}=0 \tag{Ⅲ.1.6b}$$

を得る．

1次の微小量としての速度

質点の速度を（Ⅱ.5.9）のように $v^m=dx^m/ds$ と定義する．ここで，（Ⅲ.1.4）の両辺を形式的に ds^2 で割ると，

$$g_{00}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds}+g_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}=1 \tag{Ⅲ.1.7}$$

すなわち，

$$g_{00}v^0v^0+g_{mn}v^mv^n=1 \tag{Ⅲ.1.8}$$

を得る．いまは，光速度に比較してゆっくりと運動する質点を考える．そして，その速度 v^m を1次の微小量とし，2次以上の微小量を無視すると，（Ⅲ.1.8）は

$$g_{00}v^0v^0=1 \tag{Ⅲ.1.9}$$

になる．

運動方程式

測地線（Ⅱ.5.10）は運動方程式を与える．そこにおいて（添字 $\nu=m$ として）2次の微小量を無視すると，v^mv^n の項は消え，また $\Gamma^{m}_{0n}v^0v^n$，$\Gamma^{m}_{n0}v^nv^0$ を含む項は（Ⅲ.1.6）により消えるので残るのは，$\Gamma^{m}_{00}v^0v^0$ の項だけとなって

$$\frac{dv^m}{ds}=-\Gamma^{m}_{00}v^0v^0=-g^{mn}\Gamma_{n00}v^0v^0 \tag{Ⅲ.1.10}$$

ただし，添字上下の規則を適用した．ここで，（Ⅲ.1.1）の関係を考慮し，（Ⅱ.4.8）を用いて Γ_{n00} の値を計算して，ただちに

$$\frac{dv^m}{ds}=\frac{1}{2}g^{mn}g_{00,n}v^0v^0 \tag{Ⅲ.1.11}$$

を得る．

ところで，（Ⅲ.1.11）の左辺は

$$\frac{dv^m}{ds}=\frac{dv^m}{dx^\mu}\frac{dx^\mu}{ds}=\frac{dv^m}{dx^\mu}v^\mu \tag{Ⅲ.1.12}$$

であり，ここで $\mu=n(\neq 0)$ の場合，v^μ は 1 次の微小量であり，また dv^m/dx^μ も 1 次の微小量である．したがって，（Ⅲ.1.12）の右辺全体は 2 次の微小量で 0 になる．そこで，1 次までの近似では $\mu=0$ の項のみ残り，

$$\frac{dv^m}{ds}=\frac{dv^m}{dx^0}v^0 \tag{Ⅲ.1.13}$$

となる．

（Ⅲ.1.11）および（Ⅲ.1.13）の右辺どうしを等しいとして，

$$\frac{dv^m}{dx^0}v^0=\frac{1}{2}g^{mn}g_{00,n}v^0v^0 \tag{Ⅲ.1.14}$$

すなわち，

$$\frac{dv^m}{dx^0}=\frac{1}{2}g^{mn}g_{00,n}v^0 \tag{Ⅲ.1.15}$$

ここで，（Ⅲ.1.9）より

$$v^0={g_{00}}^{-1/2} \tag{Ⅲ.1.16}$$

したがって

$$\frac{dv^m}{dx^0}=\frac{1}{2}g^{mn}g_{00,n}g_{00}{}^{-1/2} \tag{Ⅲ.1.17}$$

を得る．

合成関数の微分の公式によれば，

$$(g_{00}{}^{1/2})_{,n}=\frac{1}{2}g_{00}{}^{-1/2}g_{00,n} \tag{Ⅲ.1.18}$$

これにより（Ⅲ.1.17）は

$$\frac{dv^m}{dx^0}=g^{mn}(g_{00}{}^{1/2})_{,n} \tag{Ⅲ.1.19}$$

と書ける．

（Ⅲ.1.19）の左辺は（速度の時間微分，すなわち）加速度である．いまは力として重力しか考えていないので，これは重力加速度である．ニュートン力学では，重力加速度は重力ポテンシャルを位置座標で微分したものとして表現される．たとえば，（Ⅰ.11.2）では重力ポテンシャルは距離 r により微分されている．また，（Ⅰ.11.13）では座標 x，y，z により微分されている．したがって，（Ⅲ.1.19）の右辺における $g_{00}{}^{1/2}$ は，重力ポテンシャルの役割を果たしているようにみえる．実際，重力場の影響がきわめて小さいとしたら，$g^{mm}\approx-1$，$g^{mn}\approx 0$（$m\neq n$）なので〔(Ⅱ.1.35)〕，$g_{00}{}^{1/2}$ をニュートン・ポテンシャル ϕ とみれば，（Ⅲ.1.19）はニュートン力学での重力加速度（Ⅰ.11.13）と一致する．

弱い重力場の近似

（Ⅲ.1.19）は測地線が与えた結果である．これとは別に，アインシュタインの重力法則 $R_{\mu\nu}=0$（Ⅱ.10.1）が与える関係について計算してみよう．ここでは重力場が弱く $g_{\mu\nu}$ は近似的に一定であり，したがって $g_{\mu\nu,\sigma}$ およびそれらから構成されるクリストッフェル記号の値〔(Ⅱ.4.8）あるいは（Ⅱ.4.11)〕は1次の微小量であると仮定する．そして，2次以上の微小量は無視するこ

とにする．

（Ⅱ.9.1）の定義により

$$R_{\mu\nu}=R^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}=g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\nu\sigma} \tag{Ⅲ.1.20}$$

この右辺の計算のため，（Ⅱ.7.15）において適切な添字の変更をおこない($\mu\to\rho$, $\nu\to\mu$, $\rho\to\nu$)，2次の微小量（クリストッフェル記号どうしの積）を無視した上でそれを（Ⅲ.1.20）に代入して

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\rho\sigma,\mu\nu}-g_{\mu\sigma,\rho\nu}-g_{\rho\nu,\mu\sigma}+g_{\mu\nu,\rho\sigma}) \tag{Ⅲ.1.21}$$

したがって，アインシュタインの法則（Ⅱ.10.1）は

$$g^{\rho\sigma}(g_{\rho\sigma,\mu\nu}-g_{\mu\sigma,\rho\nu}-g_{\rho\nu,\mu\sigma}+g_{\mu\nu,\rho\sigma})=0 \tag{Ⅲ.1.22}$$

となる．

ここで（Ⅲ.1.1）を考慮し，$\mu=\nu=0$とすると，かっこ内の最後の項だけが残って，

$$g^{\rho\sigma}g_{00,\rho\sigma}=0 \tag{Ⅲ.1.23}$$

となるが，この式は$\rho,\sigma\neq0$のときのみ意味をもつので

$$g^{mn}g_{00,mn}=0 \tag{Ⅲ.1.24}$$

を得る．

他方，ダランベール方程式（Ⅱ.6.28）に弱い場の近似を適用し，$V_{,\alpha}$は1次の微小量であり，それとクリストッフェル記号との積を含む2次の微小量は無視できるとすると，

$$g^{\mu\nu}V_{,\mu\nu}=0 \tag{Ⅲ.1.25}$$

さらに，これに静的な場の仮定を加えると，Vは時間的に変化しないので，μ，νのうち少なくともどちらか一方が0の項は0になり，

$$g^{mn}V_{,mn}=0 \qquad (\text{Ⅲ}.1.26)$$

これはラプラス方程式である*3．(Ⅲ.1.24) をこれと比較すると g_{00} が V に対応し，それはニュートンの重力ポテンシャルと同様，ラプラス方程式を満たすことがわかる．

ニュートン・ポテンシャル

g_{00} がニュートン・ポテンシャルと関わることがわかったので，それに着目する．時間は $dx^0(=cdt)$ の単位で測ることにする．この量は長さの次元を有する．いまは静的で弱い重力場を考察しているので，系は特殊相対性理論が成立する慣性系に近く，したがって ds^2 において $(dx^0)^2$ の係数を構成する g_{00} は 1 に近いはずである*4．そこで，

$$g_{00}=1+2V \qquad (\text{Ⅲ}.1.27)$$

とおくと，この V は微小量であり，また無次元である．微小量 x に関する近似式

$$(1+x)^n \approx 1+nx \qquad (\text{Ⅲ}.1.28)$$

を用い，$x=2V$ かつ $n=1/2$ とすると

$$g_{00}{}^{1/2}=1+V \qquad (\text{Ⅲ}.1.29)$$

と書ける．重力加速度に関する方程式 (Ⅲ.1.19) を満たすのはこの V であり，しかもそれは (Ⅲ.1.26)〔(Ⅲ.1.24)〕のラプラス方程式を満たす．したがって，V はニュートン・ポテンシャルであることがわかる．

ニュートン・ポテンシャルの見積もり

ニュートン・ポテンシャルは (I.11.1) に与えられており，それは [長さ]^2/

---

*3　ここにおいて，$g^{mm}=-1$，$g^{mn}=0$ $(m\neq n)$〔すなわち，慣性系での直交座標，(II.1.35)〕の場合が (I.8.8) に対応する．(Ⅲ.1.26) のラプラス方程式は，共変微分によるダランベール方程式 (II.6.25) に由来するものである．

*4　(II.1.19) により，特殊相対性理論の場合は $g_{00}=1$ である．

[時間]^2 の次元をもつ*5．これに対し，上のニュートン・ポテンシャル V が無次元なのは，時間が $dx^0(=cdt)$ で測られているためである．時間の単位を通常の dt とすれば，ds^2 における $(dt)^2$ の係数 $g_{00}(t)$ は，(Ⅲ.1.27) の g_{00} とは，

$$g_{00}(t)=c^2 g_{00} \tag{Ⅲ.1.30}$$

の関係にあり*6，そのため V は c^2 ([長さ]^2/[時間]^2 の次元) をかけると通常の時間単位の場合と一致するように定義されているのである．

地球表面の場合，万有引力定数を G，地球の質量を M，半径を R とすれば，(Ⅲ.1.27) における V は，

$$V=-\frac{GM}{Rc^2} \tag{Ⅲ.1.31}$$

で与えられる*7．具体的な数字〔表Ⅲ.1〕を用いて計算すると，(Ⅲ.1.27) における $2V$ は 10^{-9} のオーダーとなって，1 に比較してきわめて小さな値であることがわかる．この小さな量が地表における重力効果を引き起こすのである．

表Ⅲ.1　数値の見積もりに関連するデータ

万有引力定数	$G=6.67\times10^{-8}\ \mathrm{cm^3s^{-2}g^{-1}}$
地球の質量	$M=5.97\times10^{27}\ \mathrm{g}$
地球の半径（赤道）	$R=6.38\times10^{8}\ \mathrm{cm}$
光速度	$c=3.00\times10^{10}\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$

$g_{00,m}$ を計算してみる．(Ⅲ.1.27) より

$$g_{00,m}=(2V)_{,m} \tag{Ⅲ.1.32}$$

であり，座標 x^m を地球の中心からの距離 R とし，(Ⅲ.1.31) の V を用いると，

*5　万有引力定数 G の次元は [長さ]^3/([時間]^2[質量]) である（表Ⅲ.1 のデータ参照）.

*6　$ds^2=g_{00}(dx^0)^2+\ldots\ldots=g_{00}c^2(dt)^2+\ldots\ldots$ における $g_{00}c^2$ が $g_{00}(t)$ である.

*7　c^2 をかけると $V=-GM/R$ となって，(Ⅰ.11.1) と一致する.

$$g_{00,m}=\frac{\partial}{\partial R}(2V)=\frac{2GM}{R^2c^2} \quad (\text{Ⅲ}.1.33)$$

これに各数値を代入して $2\times10^{-18}\text{cm}^{-1}$ の程度と算出される．空間が平らであれば $g_{00,m}$ は 0 である．したがって，平坦からのずれといっても，その値はきわめて小さい（ほとんど 0 である）．

重力加速度は $-\partial V/\partial R=-GM/(R^2c^2)$ により与えられる．これ自体の値は 10^{-18}cm^{-1} のオーダーであり，負号は加速度が R の減少する方向にあることを示す．これに c^2 をかけると $-GM/R^2$，すなわち約 980cm/s^2 というなじみの量を得る．

2 赤方偏移*8

座標時と固有時

前節で扱った静的な重力場に時計が一つ置かれていると考える．このとき，前節の（Ⅲ.1.4）が成立し，また時計は運動していないので $dx^m=0$ であることから，

$$ds^2=g_{00}(dx^0)^2 \quad (\text{Ⅲ}.2.1)$$

この式に固有時 $d\tau$〔第Ⅰ章の（Ⅰ.2.14)〕を導入し，また dx^0 を cdt に戻す*9 と，

$$d\tau=g_{00}{}^{1/2}dt \quad (\text{Ⅲ}.2.2)$$

あるいは，

$$dt=g_{00}{}^{-1/2}d\tau \quad (\text{Ⅲ}.2.3)$$

*8　本節の記述は，ディラック『一般相対性理論』の「17．重力による赤方偏移」の枠組みにもとづく．

*9　第Ⅱ章の（Ⅱ.1.1）参照．

と書ける*[10]．ここで $d\tau$ は，重力場の影響を受けない時計の示す時間である．他方，dt は座標時であり，座標系 dx^μ に置かれ，重力場の影響を受けた時計が示す時間である．

「原子時計」

原子の放出する単色光（特定の波長〔色〕の光）は時計に見立てることができる．あるいはむしろ逆で，今日では「原子時計」が時間の標準を与えている*[11]．ここでは，静的な重力場に静止し，単色光を放出している原子を考える．この放出光の周期（1 振動の時間）が固有時で T^0 であったとする*[12] と，座標時でのその周期は，（Ⅲ.2.3）より

$$T = g_{00}{}^{-1/2} T^0 \tag{Ⅲ.2.4}$$

で与えられる．一般に，光の周期 T と波長 λ は

$$\lambda = cT \tag{Ⅲ.2.5}$$

の関係にあるので，この放出光の波長は

$$\lambda = c g_{00}{}^{-1/2} T^0 \tag{Ⅲ.2.6}$$

である．

光の伝播

さて，原子は地点 A に存在し，そこから離れた地点 B においてその放出光を観測するものと考える．ここで注意すべきは，地点 A から発射された光は，重力場が静的，すなわち時間的変化がないのであるから，与えられた座標系の中で，常に同一経路で同一の時間経過により B に到達するということである．すなわち，地点 A で（座標時による）時間間隔 Δt で放出され

＊10　（Ⅲ.2.2）は第Ⅰ章の（Ⅰ.4.17）に対応する．（Ⅰ.4.17）では，$g_{00} = 1 - (2gx/c^2)$ である．

＊11　時間の単位（秒）は現在，セシウム 133 原子の放出する特定の光の周期にもとづいて定義されている．

＊12　原子の「固有周期」である．

た光は，一定の時間後，地点Bにおいても同一の時間間隔で観測される．これは，四次元空間において Δt の時間間隔で放出された光の軌跡は，全体にわたって時間軸について Δt だけずらせばぴたりと一致するはずであることを考えれば理解できる．したがって，地点Aで（の座標時で）周期 $T(\mathrm{A})$ の光は，地点Bにおいても周期 $T(\mathrm{A})$ である*13．

そこで，地点Aで観測される光の波長を λ_{A}，地点Bで観測したAからの光の波長を $\lambda_{\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A}}$ とし，また地点AおよびBでの g_{00} をそれぞれ $g_{00}(\mathrm{A})$ および $g_{00}(\mathrm{B})$ とすると，（Ⅲ.2.6）より

$$\lambda_{\mathrm{A}}=cg_{00}(\mathrm{A})^{-1/2}T^0 \qquad (\text{Ⅲ}.2.7)$$

また，Aからの光はBにおいても同じ周期で観測されるというのだから，（Ⅲ.2.5）により両者での波長も等しく，したがって（Ⅲ.2.7）を用いて，

$$\lambda_{\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A}}=\lambda_{\mathrm{A}}=cg_{00}(\mathrm{A})^{-1/2}T^0 \qquad (\text{Ⅲ}.2.8)$$

である．

他方，地点Bにおいて同じ原子の放出光を観測したとすると，（Ⅲ.2.7）においてAをBに置き換えた式が成立するので，

$$\lambda_{\mathrm{B}}=cg_{00}(\mathrm{B})^{-1/2}T^0 \qquad (\text{Ⅲ}.2.9)$$

（Ⅲ.2.8）と（Ⅲ.2.9）から T^0 を消去して，

$$\lambda_{\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A}}=\frac{g_{00}(\mathrm{B})^{1/2}}{g_{00}(\mathrm{A})^{1/2}}\lambda_{\mathrm{B}} \qquad (\text{Ⅲ}.2.10)$$

を得る．

赤方偏移

ここで，$g_{00}(\mathrm{B})=1$ とし，また $g_{00}(\mathrm{A})$ には（Ⅲ.1.27）の形式を用いることにする．これは，重力場の影響が比較的に大きな星の表面から放出される光

*13 第Ⅳ章7節「光の伝播における周期と座標時」も参照．

を，地球表面のような重力場の影響の小さな場所で観測することに対応する．

近似式（Ⅲ.1.28）を $n=-1/2$ として使用すると，

$$g_{00}(\mathrm{A})^{-1/2}=1-V \qquad (\text{Ⅲ}.2.11)$$

であるから，（Ⅲ.2.10）は

$$\lambda_{\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A}}=g_{00}(\mathrm{A})^{-1/2}\lambda_{\mathrm{B}}=(1-V)\lambda_{\mathrm{B}} \qquad (\text{Ⅲ}.2.12)$$

となる．

前節でみたように，重力場では V は負の値である〔(Ⅲ.1.31)〕．したがって，比較的に強い重力場（A）にある光源からの光は，重力場の影響が（ほとんど）ない観測地点（B）では，そこに存在している同一の光源から発せられる光に比較して，波長がのびている――赤方偏移している――ことがわかる．

3 シュヴァルツシルトの解*14

不変距離

アインシュタインの重力の法則は，静的で球対称な重力場の場合，比較的に容易に解くことができる．それがシュヴァルツシルトの解である．

極座標を空間座標に選び，

$$x^0=ct,\quad x^1=r,\quad x^2=\theta,\quad x^3=\phi \qquad (\text{Ⅲ}.3.1)$$

とする．特殊相対性理論（平らな空間）における不変距離は，極座標では

$$ds^2=c^2dt^2-dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (\text{Ⅲ}.3.2)$$

で与えられる*15．いま対象としているのは，球対称な質量が中心に存在す

＊14　本節の記述は，ディラック『一般相対性理論』の「18．シュヴァルツシルトの解」の枠組みにもとづく．

る重力場であるから，不変距離は $r\to\infty$ において（すなわち，重力の影響が小さくなると），（Ⅲ.3.2）に近づく必要がある．そこで，球対称に対応する一般的な不変距離として，

$$ds^2=Uc^2dt^2-Vdr^2-Wr^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (\text{Ⅲ}.3.3)$$

とおく．ここで，U，V，W は r のみの関数であり，$r\to\infty$ において 1 に近づく性質をもつ．

なお，不変距離は一般には $drd\theta, drd\phi, d\theta d\phi$ のような項を含む．しかし，いま対象としているのは球対称の場であり，$\theta\leftrightarrow-\theta$，$\phi\leftrightarrow-\phi$ の独立の操作で ds^2 が変化してはならず*16，したがってそれらの項は 0 になる．同様にして，すでに（Ⅲ.1.2）に関連しておこなったように，静的な場では $t\leftrightarrow-t$ の操作で ds^2 が変化してはならず，したがって，$drdt, d\theta dt, d\phi dt$ を含む項も存在しない．

（Ⅲ.3.3）において，W は r のみの関数なので，Wr^2 を新しい座標 r^2 と再定義しても球対称性の記述には影響がない．これに加え，指数関数を用いて，（Ⅲ.3.3）を

$$ds^2=e^{2\nu}c^2dt^2-e^{2\lambda}dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2 \qquad (\text{Ⅲ}.3.4)$$

と書くことにする．これらの指数関数は，$r\to\infty$ において 1 に近づく性質があることを前提とする．

計量テンソル

ここから計量テンソルを読み取ると，座標成分の番号は（Ⅲ.3.1）を参照して，

$$g_{00}=e^{2\nu},\ g_{11}=-e^{2\lambda},\ g_{22}=-r^2,\ g_{33}=-r^2\sin^2\theta \qquad (\text{Ⅲ}.3.5)$$

＊15 （I.6.9）参照．ただしここでは，（Ⅱ.1.2）に合わせて，dt^2〔$(dx^0)^2$〕の係数を正，$(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2$ に対応する項〔（I.6.9）の右辺〕の係数を負にしている．

＊16 図I.4 参照．また，（I.6.1）によれば，$\theta\to-\theta$ により $(x,y,z)\to(-x,-y,z)$，また $\phi\to-\phi$ により $(x,y,z)\to(x,-y,z)$ となり，いずれも原点を中心とした球対称な場を想定している場合は変化を生じない．なお，念のため，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$．

および

$$g_{\mu\nu}=0 \quad (\mu \neq \nu) \tag{Ⅲ.3.6}$$

これに対応し，計量テンソルの積の公式（Ⅱ.1.26）によれば

$$g^{00}=e^{-2\nu},\ g^{11}=-e^{-2\lambda},\ g^{22}=-r^{-2},\ g^{33}=-r^{-2}\sin^{-2}\theta \tag{Ⅲ.3.7}$$

および

$$g^{\mu\nu}=0 \quad (\mu \neq \nu) \tag{Ⅲ.3.8}$$

となる*17.

リッチ・テンソル

次に，重力方程式（Ⅱ.10.1）のリッチ・テンソルを計算するため，それを構成するクリストッフェル記号の値を求める．それらは，与えられた計量テンソルを用いて，（Ⅱ.4.11）および（Ⅱ.4.8）により計算でき，$r(=x^1)$ による微分をダッシュで表すと，ゼロでない項は，

$$\Gamma^1_{00}=\nu' e^{2\nu-2\lambda},\ \Gamma^1_{11}=\lambda',\ \Gamma^1_{22}=-re^{-2\lambda},\ \Gamma^1_{33}=-re^{-2\lambda}\sin^2\theta \tag{Ⅲ.3.9a}$$

$$\Gamma^0_{10}=\nu',\ \Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=r^{-1},\ \Gamma^3_{23}=\cot\theta,\ \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta \tag{Ⅲ.3.9b}$$

である*18．ただし，クリストッフェル記号は下の添字について対称なので，そのうちの一方のみを記した．

これらクリストッフェル記号の値から，（Ⅱ.9.6）によりリッチ・テンソルを得る*19．結果は，

*17　類似の操作はすでに何度かおこなっている．たとえば，（Ⅲ.1.5）あるいは（Ⅱ.1.35），およびそれらに関連した記述参照.

*18　例として Γ^1_{00} の計算を第Ⅳ章6節「クリストッフェル記号およびリッチ・テンソルの計算例」に示した.

*19　例として R_{00} の計算を第Ⅳ章6節「クリストッフェル記号およびリッチ・テンソルの計算例」に示した.

$$R_{00}=\left(-\nu''+\lambda'\nu'-\nu'^2-\frac{2\nu'}{r}\right)e^{2\nu-2\lambda} \quad (\text{III}.3.10)$$

$$R_{11}=\nu''-\lambda'\nu'+\nu'^2-\frac{2\lambda'}{r} \quad (\text{III}.3.11)$$

$$R_{22}=(1+r\nu'-r\lambda')e^{-2\lambda}-1 \quad (\text{III}.3.12)$$

$$R_{33}=R_{22}\sin^2\theta \quad (\text{III}.3.13)$$

であり，他の成分は 0 である．

シュヴァルツシルトの解

アインシュタインの重力法則は，$R_{\mu\nu}$ が 0 であることを要求する．(Ⅲ.3.10) の R_{00} および (Ⅲ.3.11) の R_{11} を 0 とすると，

$$\lambda'+\nu'=(\lambda+\nu)'=0 \quad (\text{III}.3.14)$$

を得るが，これは $\lambda+\nu$ が定数であることを意味する．先に述べたように，$r\to\infty$ において $e^{2\nu}$，$e^{2\lambda}\to 1$，すなわち λ および ν は 0 に近づくはずであり，かつ $\lambda+\nu$ は定数であるというのだから，

$$\lambda+\nu=0 \quad (\text{III}.3.15)$$

である．

(Ⅲ.3.12) において R_{22} が 0 に等しいことから

$$(1+r\nu'-r\lambda')e^{-2\lambda}-1=0 \quad (\text{III}.3.16)$$

となるが，ここに (Ⅲ.3.14) および (Ⅲ.3.15) から得られる

$$\lambda'=-\nu',\ \lambda=-\nu \quad (\text{III}.3.17)$$

を代入して λ および λ' を消去すると，

$$(1+2r\nu')e^{2\nu}=1 \quad (\text{III}.3.18)$$

この式は積の微分の公式により

$$(re^{2\nu})'=1 \tag{Ⅲ.3.19}$$

に等しい*20．この式の両辺を積分する．まず左辺の積分は*21，

$$\int (re^{2\nu})'dr=re^{2\nu}+C_1 \tag{Ⅲ.3.20}$$

また右辺の積分は

$$\int dr=r+C_2 \tag{Ⅲ.3.21}$$

ここで，C_1 および C_2 は積分定数である．したがって，（Ⅲ.3.19）の両辺を積分した結果は，積分定数をまとめて $-2m(=C_2-C_1)$ とおくと，

$$re^{2\nu}=r-2m \tag{Ⅲ.3.22}$$

となる．

なお，ここで得た（Ⅲ.3.15）および（Ⅲ.3.22）〔(Ⅲ.3.18)〕は，R_{22} だけでなく，R_{00} および R_{11} も 0 にすることは，（Ⅲ.3.10）および（Ⅲ.3.11）において，（たとえば）λ' を消去することで，確認できる*22．また，R_{22} は 0 なので，（Ⅲ.3.13）より R_{33} も 0 になる．

（Ⅲ.3.22）を $e^{2\nu}$ について解いて

$$e^{2\nu}=1-\frac{2m}{r} \tag{Ⅲ.3.23}$$

これを（Ⅲ.3.5）の g_{00} に用いると

$$g_{00}=1-\frac{2m}{r} \tag{Ⅲ.3.24}$$

また，

---

*20　（Ⅰ.9.19）参照．

*21　（Ⅰ.9.27）参照．

*22　（Ⅲ.3.18）より $\nu'=(e^{-2\nu}-1)/2r$，また $\nu''=(-2\nu're^{-2\nu}-e^{-2\nu}+1)/2r^2$ を用いる．

$$g_{11}=-e^{2\lambda}=-e^{-2\nu}=-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} \qquad (\text{III}.3.25)$$

ただし，（Ⅲ.3.15）の関係を用いた．これにより，（Ⅲ.3.4）は，

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2 \qquad (\text{III}.3.26)$$

となって，これがシュヴァルツシルト（K. Schwarzschild, 1873–1916）の解である．

rが大きいところでは，解は（Ⅲ.3.2）に近づく．（Ⅲ.3.24）を（Ⅲ.1.27）と比較すると，m/rはポテンシャル $-V$にあたることがわかる．Vとして（Ⅲ.1.31）の形のものを（Rをrに置き換えて）用いると，

$$m=\frac{GM}{c^2} \qquad (\text{III}.3.27)$$

ただし，Mは中心に存在する質量である．

4 ブラックホール[*23]

本節は，それにつづく5–8節の内容とは独立している．

測地線の方程式

シュヴァルツシルトの解（Ⅲ.3.26）は，$r=2m$に特異点を有する．そこでは$g_{00}=0$〔（Ⅲ.3.24）〕，またg_{11}は無限〔（Ⅲ.3.25）〕になる．この特異点に近づくと何が起きるのか．中心の物体に向かって落下する質点を考え，その速

＊23　本節の記述は，ディラック『一般相対性理論』の「19．ブラック・ホール」の枠組みの一部にもとづく．

度ベクトルを第Ⅱ章5節〔(Ⅱ.5.9)〕および第Ⅲ章1節のように $v^\mu = dx^\mu/ds$ で定義する．落下は $x^1(=r)$ の減少とともに中心に向かうとすると，他の速度成分はないので，

$$v^2 = v^3 = 0 \tag{Ⅲ.4.1}$$

である．

このことに注意すると，測地線の方程式（Ⅱ.5.10）から

$$\begin{aligned}\frac{dv^0}{ds} &= -\Gamma^0_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -g^{00}\Gamma_{0\mu\nu}v^\mu v^\nu \\ &= -g^{00}(\Gamma_{001}v^0 v^1 + \Gamma_{010}v^1 v^0) = -2g^{00}\Gamma_{001}v^0 v^1\end{aligned} \tag{Ⅲ.4.2}$$

なお，2番目の等号ではクリストッフェル記号の添字を下げる操作をした[*24]．また，（Ⅲ.4.1）より v^2 および v^3 を含む項は0である．さらに，いまはシュヴァルツシルトの解を考察しているので，(Ⅲ.3.9)〔ゼロでない項のみを示す〕より Γ_{000}（あるいは Γ^0_{00}）および Γ_{011}（あるいは Γ^0_{11}）は0であるから，v^0v^0 や v^1v^1 の項も消える．

ここで，(Ⅱ.4.8) から Γ_{001} の値を求めるが，いまは静的な重力場〔(Ⅲ.1.1)〕が対象であることを考慮すると，

$$\Gamma_{001} = \frac{1}{2}g_{00,1} \tag{Ⅲ.4.3}$$

これより

$$2\Gamma_{001}v^1 = g_{00,1}v^1 = \frac{dg_{00}}{dx^1}\frac{dx^1}{ds} = \frac{dg_{00}}{ds} \tag{Ⅲ.4.4}$$

となる．これを（Ⅲ.4.2）の右辺に代入することにより

＊24　$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho}\Gamma_{\rho\mu\nu}$ において $\sigma=0$ とすると，$\Gamma^0_{\mu\nu} = g^{0\rho}\Gamma_{\rho\mu\nu}$．右辺で ρ についての和を考慮すると，(Ⅲ.3.7) から $\rho=0$ 以外の項はすべて0になるので，$\Gamma^0_{\mu\nu} = g^{00}\Gamma_{0\mu\nu}$ である．

$$\frac{dv^0}{ds}=-g^{00}\frac{dg_{00}}{ds}v^0 \tag{Ⅲ.4.5}$$

また，（Ⅲ.1.5）より

$$g^{00}=1/g_{00} \tag{Ⅲ.4.6}$$

なので，これを用いて（Ⅲ.4.5）は

$$g_{00}\frac{dv^0}{ds}+\frac{dg_{00}}{ds}v^0=0 \tag{Ⅲ.4.7}$$

あるいは，

$$\frac{d}{ds}(g_{00}v^0)=0 \tag{Ⅲ.4.8}$$

と書くことができ，これより k を定数として，

$$g_{00}v^0=k \tag{Ⅲ.4.9}$$

を得る[*25]．

他方，（Ⅲ.1.8）において（Ⅲ.4.1）を考慮すると，

$$g_{00}v^0v^0+g_{11}v^1v^1=1 \tag{Ⅲ.4.10}$$

この両辺に g_{00} をかけて

$$(g_{00}v^0)^2+g_{00}g_{11}v^1v^1=g_{00} \tag{Ⅲ.4.11}$$

ここで，（Ⅲ.3.5）および（Ⅲ.3.15）から，

$$g_{00}g_{11}=-e^{2(\nu+\lambda)}=-e^0=-1 \tag{Ⅲ.4.12}$$

この式とともに（Ⅲ.4.9）を（Ⅲ.4.11）に代入して，

＊25　質点の運動は，第Ⅱ章5節と同様，s により規定される．

$$k^2-(v^1)^2=g_{00} \tag{Ⅲ.4.13}$$

を得る*26.

（Ⅲ.4.13）の右辺に（Ⅲ.3.24）を代入して，

$$k^2-(v^1)^2=1-\frac{2m}{r} \tag{Ⅲ.4.14}$$

落下なので $v^1<0$ として，（Ⅲ.4.14）から

$$v^1=-\left(k^2-1+\frac{2m}{r}\right)^{1/2} \tag{Ⅲ.4.15}$$

ここで，$v^\mu=dx^\mu/ds$ を考慮すると

$$\frac{dx^0}{dx^1}=\frac{dx^0}{ds}\frac{ds}{dx^1}=\frac{v^0}{v^1} \tag{Ⅲ.4.16}$$

他方，（Ⅲ.4.9）を v^0 について解き，（Ⅲ.3.24）を用いると，

$$v^0=k(g_{00})^{-1}=k\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} \tag{Ⅲ.4.17}$$

（Ⅲ.4.16）の左辺で x^1 を r に戻し，右辺に（Ⅲ.4.15）および（Ⅲ.4.17）を代入すると，

$$\frac{dx^0}{dr}=-k\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(k^2-1+\frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \tag{Ⅲ.4.18}$$

となる．

特異点近傍

質点が特異点に近づいた（$r\to 2m$）として

---

*26　$v^1=0$ のとき $k=g_{00}{}^{1/2}$ なので，k〔定数（Ⅲ.4.9）〕は質点が落下を始めたときの $g_{00}{}^{1/2}$ の値である．

$$r=2m+\varepsilon \tag{Ⅲ.4.19}$$

とおく．ここでεは微小量であり，2次の微小量ε^2は無視することにする．まず

$$1-\frac{2m}{r}=\frac{\varepsilon}{r} \tag{Ⅲ.4.20}$$

を（Ⅲ.4.18）に代入して

$$\begin{aligned}\frac{dx^0}{dr}&=-k\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1}\left(k^2-\frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1/2}=-k\frac{r}{\varepsilon}(k^2)^{-1/2}\left(1-\frac{\varepsilon}{rk^2}\right)^{-1/2}\\&=-\frac{r}{\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{rk^2}\right)^{-1/2}\approx-\frac{r}{\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon}{2rk^2}\right)=-\left(\frac{r}{\varepsilon}+\frac{1}{2k^2}\right)\end{aligned} \tag{Ⅲ.4.21}$$

なお，途中で近似式（Ⅲ.1.28）を用いた．

$r\to 2m$になると，εは0に近づくので（Ⅲ.4.21）の右辺では第1項が圧倒的に大きくなり，また$r/\varepsilon\to 2m/\varepsilon$なので，

$$\frac{dx^0}{dr}=-\frac{2m}{\varepsilon}=-\frac{2m}{r-2m} \tag{Ⅲ.4.22}$$

ただし，（Ⅲ.4.19）によりεをもとの記号に戻した．（Ⅲ.4.22）を積分すると，

$$x^0=-2m\log(r-2m)+\text{定数} \tag{Ⅲ.4.23}$$

を得る[*27]．これにより，$r\to 2m$で$x^0\to\infty$となることがわかる[*28]．すなわち（x^0は時間座標なので），質点が$r=2m$に到着するまでには無限の時間がかかる．

＊27　（Ⅲ.4.23）をrで微分すると（Ⅲ.4.22）に戻ることはすぐ確認できる．なお，必要があれば，（Ⅰ.9.16）も参照．

＊28　$x\to 0$のとき$\log x\to-\infty$．

質点とともに運動する人の場合

これまでは中心の物体に向かって落下する質点を考察したが，他方，質点とともに運動する人にとってはどうであろうか．その人の時間は ds である[*29]．速度ベクトル v^1 の定義から（$x^1=r$ として），

$$\frac{ds}{dr}=\frac{1}{v^1}=-\left(k^2-1+\frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \tag{Ⅲ.4.24}$$

ただし，最後の変形では（Ⅲ.4.15）を用いた．この式の値は $r\to 2m$ のとき $-k^{-1}$ になる．したがって，その人は有限の時間のうちに特異点に到着し，さらに落下を続けることになる．

ブラックホール

特異点 $r=2m$ は「シュヴァルツシルト半径」と呼ばれる．また，$r=2m$ を半径とする球面は「シュヴァルツシルト表面」である．中心の質量に向かって「落下」する質点を観測すると，それがシュヴァルツシルト表面に到着するまでには無限の時間がかかる．これは，シュヴァルツシルト表面付近では，時間の進みが極端に遅くなる――時間がほぼ静止することを意味する．

質点を構成する原子が単色光を放出しているとすると，重力による赤方偏移が観測されるであろう．（Ⅲ.2.12）において（Ⅲ.3.24）の g_{00} を用いると，

$$\lambda_{\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A}}=\left(1-\frac{2m}{r_{\mathrm{A}}}\right)^{-1/2}\lambda_{\mathrm{B}} \tag{Ⅲ.4.25}$$

ここで，A は質点，B は観測者の位置を表す．質点がシュヴァルツシルト表面に近づくにつれ（$r_{\mathrm{A}}\to 2m$），赤方偏移は増大し無限大に近づく．このことは，波長と周期の関係 $\lambda=cT$〔(Ⅲ.2.5)〕を想起すると，シュヴァルツシルト表面付近では「原子時計」の周期が無限大になる――時計がほぼ静止してしまうことを意味する．したがってそこでは，「外」(r が増大する方向)

*29　これは固有時である．固有時 $d\tau$ は $ds=cd\tau$ で定義されるが〔(Ⅰ.2.14)〕，ここでは時間を x^0（$=ct$，長さの単位）で測っているので，固有時もそれに合わせ $ds=cd\tau$ という長さの単位になる．

に向かって光が放出されたとしても，光は（時間が静止しているのだから）表面を離れることができないであろう.

シュヴァルツシルト表面およびそれより内側の領域は「ブラックホール」と呼ばれる．諸物体はそこへと落下するであろうが，そこからは何も出てこない．光すらも脱出できない*30．したがってわれわれは，ブラックホールについて，直接の観測による知見を得ることができない.

m は前節の（Ⅲ.3.27）〔$m=GM/c^2$〕により与えられる．ここで，中心に存在する質量 M を地球として $r=2m$ を求めると，

$$r=2\frac{GM}{c^2}\approx 0.9\,\mathrm{cm} \tag{Ⅲ.4.26}$$

ここで計算には 1 節末の表のデータを用いた．算出したこの r は，しかしながら，シュヴァルツシルト半径ではない．シュヴァルツシルト半径はシュヴァルツシルトの解に由来し，シュヴァルツシルトの解は空っぽの空間におけるアインシュタインの法則（Ⅱ.10.1）を前提にしている．他方，地球の中心から $r\approx 0.9$ cm の距離には物質が存在しており，空っぽではない．地球の質量を前提とし，シュヴァルツシルト半径を生成するためには，地球全体を半径 0.9 cm 以下に圧縮する必要がある．ブラックホールとはそんなものである.

5 重力中心を含む平面での測地線

これから水星の近日点の移動（6 節）および重力場による光線の湾曲（7 節）について考察するが，このどちらも重力中心である太陽を含む平面上での現象である．水星の運動は常に太陽と同一平面上にあるし，太陽の近傍を伝播する光線も同一平面上で記述することができる．そこで本節では，重力中心を含む平面における測地線の方程式に着目し，そこから得られる結果を

---

*30　シュヴァルツシルト表面の内側では，「外」に向かって光を発射しても，それは中心に向かって「落下」してしまうことが知られている.

求める.

質点の測地線

重力のほかにはいかなる力も受けない質点の軌道は測地線である. 測地線の方程式は（Ⅱ.5.11）に与えられており, ここにあらためて再現すると,

$$\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+\Gamma^\nu_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}=0 \qquad (\text{Ⅲ}.5.1)$$

である. 以下の本節では極座標を用いるので, x^ν は（Ⅲ.3.1）と同じで, 時間 ct および (r,θ,ϕ) に対応する.

運動する質点は静的な球対称の重力場にあるとする. そのときの 0 でないクリストッフェル記号の値は（Ⅲ.3.9）に与えられている. そこで, $\nu=0,1,2,3$ のそれぞれについて, （Ⅲ.5.1）を具体的に書き表してみる.

まず $\nu=0$ では（0 でない項は $\Gamma^0_{10}=\Gamma^0_{01}=\nu'$ 以外に存在しないので）

$$\frac{cd^2t}{ds^2}+\Gamma^0_{10}\frac{dr}{ds}\frac{cdt}{ds}+\Gamma^0_{01}\frac{cdt}{ds}\frac{dr}{ds}=0 \qquad (\text{Ⅲ}.5.2)$$

ここにクリストッフェル記号の値を入れ, 両辺を c で割って

$$\frac{d^2t}{ds^2}+2\nu'\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}=0 \qquad (\text{Ⅲ}.5.3)$$

$\nu=1$ では,

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\Gamma^1_{00}\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2+\Gamma^1_{11}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\Gamma^1_{22}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\Gamma^1_{33}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=0 \qquad (\text{Ⅲ}.5.4)$$

すなわち,

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\nu' e^{2\nu-2\lambda}\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2+\lambda'\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-re^{-2\lambda}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2-re^{-2\lambda}\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=0$$

$$(\text{Ⅲ}.5.5)$$

$\nu=2$ では,

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\Gamma^2_{12}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}+\Gamma^2_{21}\frac{d\theta}{ds}\frac{dr}{ds}+\Gamma^2_{33}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=0 \tag{Ⅲ.5.6}$$

すなわち,

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=0 \tag{Ⅲ.5.7}$$

$\nu=3$ では,

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+\Gamma^3_{13}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}+\Gamma^3_{31}\frac{d\phi}{ds}\frac{dr}{ds}+\Gamma^3_{23}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds}+\Gamma^3_{32}\frac{d\phi}{ds}\frac{d\theta}{ds}=0 \tag{Ⅲ.5.8}$$

すなわち,

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}+2\cot\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds}=0 \tag{Ⅲ.5.9}$$

ここで,

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{Ⅲ.5.10}$$

である.

初期条件の導入

初期条件としては,

$$\cos\theta=0,\ \text{すなわち}\ \theta=\frac{\pi}{2} \tag{Ⅲ.5.11}$$

および

$$\frac{d\theta}{ds}=0 \tag{Ⅲ.5.12}$$

とする．前者は質点が $\theta=\pi/2$ 平面上にあること，後者は質点の θ 方向の初速度が 0 であること*31，すなわち θ を変化させる方向の速度が 0 であることを表す．これら初期条件を（Ⅲ.5.7）に代入すると，

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}=0 \tag{Ⅲ.5.13}$$

これは θ 方向の加速度（ということは力）が 0 であること，すなわち，質点は $\theta=\pi/2$ 平面上にとどまり続ける（すなわち，この平面上を運動し続ける）ことを意味する．

初期条件により（Ⅲ.5.5）および（Ⅲ.5.9）はそれぞれ

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\nu' e^{2\nu-2\lambda}\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2+\lambda'\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-re^{-2\lambda}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=0 \tag{Ⅲ.5.14}$$

および

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}=0 \tag{Ⅲ.5.15}$$

となる．初期条件を前提にすれば，これら二つの式と（Ⅲ.5.3）が質点の運動を規定する方程式である．

ϕ に関する式

（Ⅲ.5.15）の解は

$$r^2\frac{d\phi}{ds}=h \tag{Ⅲ.5.16}$$

＊31　質点の速度は $v^m=dx^m/ds$ で定義されている．

である．この両辺を s で微分することによって確認しておく．

まず，

$$\left(\frac{d}{ds}r^2\right)\left(\frac{d\phi}{ds}\right)+r^2\frac{d^2\phi}{ds^2}=0 \tag{Ⅲ.5.17}$$

すなわち，

$$2r\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}+r^2\frac{d^2\phi}{ds^2}=0 \tag{Ⅲ.5.18}$$

これを変形すれば（Ⅲ.5.15）と一致し，したがって（Ⅲ.5.16）がその解であることを確認できる．

t に関する式

（Ⅲ.5.3）の解は，b を定数として，

$$\frac{cdt}{ds}=\frac{b}{\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)} \tag{Ⅲ.5.19}$$

である．この両辺を s で微分することによって確認しておく．少々長くなる．道を急ぐ読者は，次の見出しの項までスキップできる．

まず，

$$1-\frac{2m}{r}=k \tag{Ⅲ.5.20}$$

とおくと，（Ⅲ.5.19）は

$$\frac{cdt}{ds}=\frac{b}{k} \tag{Ⅲ.5.21}$$

両辺を s で微分して，

$$\frac{cd^2t}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{b}{k}\right)=\frac{dk}{ds}\frac{d}{dk}\left(\frac{b}{k}\right)=-\frac{b}{k^2}\frac{dk}{ds} \qquad (\text{Ⅲ}.5.22)$$

また，（Ⅲ.5.20）において

$$\frac{dk}{dr}=\frac{d}{dr}(1-2mr^{-1})=(-2m)\times(-1)r^{-2}=\frac{2m}{r^2} \qquad (\text{Ⅲ}.5.23)$$

であるから，

$$\frac{dk}{ds}=\frac{dk}{dr}\frac{dr}{ds}=\frac{2m}{r^2}\frac{dr}{ds} \qquad (\text{Ⅲ}.5.24)$$

この式を（Ⅲ.5.22）に代入して

$$\frac{cd^2t}{ds^2}=-\frac{2mb}{k^2r^2}\frac{dr}{ds} \qquad (\text{Ⅲ}.5.25)$$

他方，（Ⅲ.5.20）と（Ⅲ.3.23）から

$$e^{2\nu}=k \qquad (\text{Ⅲ}.5.26)$$

この両辺の自然対数をとって $2\nu=\log k$，すなわち

$$\nu=\frac{1}{2}\log k \qquad (\text{Ⅲ}.5.27)$$

この両辺を k で微分して

$$\frac{d\nu}{dk}=\frac{1}{2k} \qquad (\text{Ⅲ}.5.28)$$

また，

$$\nu'=\frac{d\nu}{dr}=\frac{d\nu}{dk}\frac{dk}{dr} \qquad (\text{Ⅲ}.5.29)$$

であるから，この右辺に（Ⅲ.5.28）および（Ⅲ.5.23）を代入して

$$\nu' = \frac{1}{2k} \times \frac{2m}{r^2} = \frac{m}{r^2 k} \tag{Ⅲ.5.30}$$

を得る．

ここで（Ⅲ.5.25）の右辺を変形して

$$\frac{cd^2t}{ds^2} = -2\left(\frac{m}{r^2 k}\right)\left(\frac{b}{k}\right)\frac{dr}{ds} \tag{Ⅲ.5.31}$$

この式の右辺に（Ⅲ.5.30）および（Ⅲ.5.21）を代入すると

$$\frac{cd^2t}{ds^2} = -2\nu' \frac{cdt}{ds}\frac{dr}{ds} \tag{Ⅲ.5.32}$$

これを変形すれば（Ⅲ.5.3）と一致し，したがって，長くはなったが，（Ⅲ.5.19）はその解であることが確認できる．

r に関する式（1）

あと一つ残った式（Ⅲ.5.14）の解を得るのは困難である．そこで，その代わりに，不変距離の式を用いる．まずは，（Ⅲ.3.26）の両辺を形式的に ds^2 で割って，

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r^2 \sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 \tag{Ⅲ.5.33}$$

まず，この式の右辺第 1 項の cdt/ds および第 4 項の $d\phi/ds$ は，それぞれ（Ⅲ.5.19）および（Ⅲ.5.16）に「解」が与えられており，それらはともに変数 r のみで表現されていることに注意する．ここで求めたいのは，空間における質点あるいは光線の軌跡である．いま θ は一定〔(Ⅲ.5.11)〕なので，問題は r と ϕ の関係である．

そこで，（Ⅲ.5.33）の右辺第 2 項において

$$\frac{dr}{ds}=\frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}=\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi} \tag{Ⅲ.5.34}$$

ただし，最後の変形においては（Ⅲ.5.16）の関係を用いた．また，（Ⅲ.5.33）の右辺第 3 項は（Ⅲ.5.12）により 0，また第 4 項では（Ⅲ.5.11）により $\sin^2\theta=1$ であることに注意すると，（Ⅲ.5.33）は，

$$1=\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2-r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 \tag{Ⅲ.5.35}$$

ここに（Ⅲ.5.19）および（Ⅲ.5.16）を代入すると

$$1=\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{b^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}-\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2-r^2\frac{h^2}{r^4} \tag{Ⅲ.5.36}$$

すなわち，

$$1=\frac{b^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}-\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2-\frac{h^2}{r^2} \tag{Ⅲ.5.37}$$

この両辺に $(1-2m/r)$ をかけ

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)=b^2-\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2-\frac{h^2}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right) \tag{Ⅲ.5.38}$$

を得る．

r に関する式（2）

（Ⅲ.5.38）で，

$$\frac{1}{r}=u,\quad r=\frac{1}{u} \tag{Ⅲ.5.39}$$

とおくと，

$$(1-2mu)=b^2-h^2u^4\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2-h^2u^2(1-2mu) \qquad (\text{III}.5.40)$$

この右辺第 2 項に

$$\frac{dr}{d\phi}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\phi}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi} \qquad (\text{III}.5.41)$$

〔(Ⅲ.5.39) に注意〕を代入すると，

$$(1-2mu)=b^2-h^2\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2-h^2u^2(1-2mu) \qquad (\text{III}.5.42)$$

この両辺を h^2 で割って整理し，

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+u^2=\frac{2mu}{h^2}+2mu^3+\frac{b^2-1}{h^2} \qquad (\text{III}.5.43)$$

を得る．

(Ⅲ.5.43) の両辺をさらに ϕ で微分する*32．すると，

$$2\frac{du}{d\phi}\frac{d}{d\phi}\frac{du}{d\phi}+2u\frac{du}{d\phi}=\frac{2m}{h^2}\frac{du}{d\phi}+6mu^2\frac{du}{d\phi} \qquad (\text{III}.5.44)$$

この両辺を $2(du/d\phi)$ で割って，

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{m}{h^2}+3mu^2 \qquad (\text{III}.5.45)$$

あるいは u を (Ⅲ.5.39) によりもとに戻して

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{m}{h^2}+3m\frac{1}{r^2} \qquad (\text{III}.5.46)$$

---

*32　u は ϕ の関数なので，合成関数の微分の公式 (I.9.8) に注意する．

を得る．

ニュートン力学との対応

上で得た結果を，太陽のつくる静的で球対称な場における惑星の運動に適用してみる．まず，（Ⅲ.5.46）に出現する h は，（Ⅲ.5.16）の右辺の定数である．（Ⅲ.5.16）は，（I.12.2）に与えられたケプラーの第二法則に対応するが，その単位（次元）には注意しなければならない．固有時（$d\tau$：[時間] 単位）を用いて（I.12.2）の第二法則をあらためて

$$r^2\frac{d\phi}{d\tau}=\alpha \tag{Ⅲ.5.47}$$

と定義すると*33，ここで α は面積速度の 2 倍である．他方，（Ⅲ.5.16）の分母 ds は［長さ］の単位であり，（I.2.14）の $ds=cd\tau$ の関係を用いると

$$r^2\frac{d\phi}{cd\tau}=h \tag{Ⅲ.5.48}$$

と表現されるので，（Ⅲ.5.47）と（Ⅲ.5.48）の比較により，

$$h=\frac{\alpha}{c} \tag{Ⅲ.5.49}$$

の関係にある．また，（Ⅲ.5.46）における m は，（Ⅲ.3.27）に与えられた量（GM/c^2）である．それらを用いると（Ⅲ.5.46）は

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{GM}{\alpha^2}+\frac{3GM}{r^2c^2} \tag{Ⅲ.5.50}$$

と書ける．

この（Ⅲ.5.50）はニュートン力学における惑星の運動方程式（I.12.3）に対応するものであるが，右辺第 2 項が新たに出現している．ただしこの項は

＊33　固有時 τ で定義したのは，「運動のパラメータ」的役割を果たしている $ds(=cd\tau)$ と関係づけるためである．ここでの τ は，（I.12.2）の t と実際上等しいものとして扱っている．

分母に c^2 があるので，きわめて小さな量である．

光の伝播の場合

以上は質点の運動に関するものである．他方，光の伝播においては，不変距離 ds は 0 になってしまうので〔ゼロ測地線（Ⅱ.5.14)〕，（Ⅲ.5.1）の測地線は使用できない．それに代わるのが，（Ⅲ.5.1）において $ds \to d\tau$ とした方程式

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}+\Gamma^\nu_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}=0 \qquad (\text{Ⅲ}.5.51)$$

である．これは（Ⅱ.5.4）と同じであり，τ は光の経路に沿って変化するパラメータである．光は $\theta=\pi/2$ 平面上を伝播するとすれば，初期条件（Ⅲ.5.11）はそのままであり，（Ⅲ.5.12）は

$$\frac{d\theta}{d\tau}=0 \qquad (\text{Ⅲ}.5.52)$$

と書き直される．

以上を前提とすれば，これまでの展開がそのまま参照でき，（Ⅲ.5.16）に対応して

$$r^2\frac{d\phi}{d\tau}=h \qquad (\text{Ⅲ}.5.53)$$

また，（Ⅲ.5.19）に対応しては

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{b}{\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)} \qquad (\text{Ⅲ}.5.54)$$

を得る[*34]．なお，h および b は，**ここで新たに定義される**定数である．さらに，（Ⅲ.5.33）に対応する式は，次のようにして得られる．

＊34 （Ⅲ.5.19）の左辺は分母・分子とも長さの次元であるが，この（Ⅲ.5.54）では分母・分子とも時間の次元である．

いまは光の伝播を扱っており $ds^2=0$ なので，（Ⅲ.3.26）から，

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2=0 \quad (\text{Ⅲ}.5.55)$$

この両辺を形式的に $d\tau^2$ で割って，

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2-r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2=0$$

（Ⅲ.5.56）

これが（Ⅲ.5.33）に対応する．

（Ⅲ.5.56）の左辺第 2 項においては，

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\tau}=\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi} \quad (\text{Ⅲ}.5.57)$$

ただし，最後の変形においては（Ⅲ.5.53）の関係を用いた．また，（Ⅲ.5.56）の左辺第 3 項は（Ⅲ.5.52）により 0，また第 4 項では $\sin^2\theta=1$ であることに注意すると，（Ⅲ.5.56）は，

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2-r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2=0 \quad (\text{Ⅲ}.5.58)$$

になる．この式の左辺第 1 項に（Ⅲ.5.54），第 3 項に（Ⅲ.5.53）の関係を用いると，

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{b^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}-\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2-r^2\frac{h^2}{r^4}=0 \quad (\text{Ⅲ}.5.59)$$

ただし，（左辺第 1 項で）定数 cb を新たに b と定義した．（Ⅲ.5.59）は

$$\frac{b^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}-\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2-\frac{h^2}{r^2}=0 \quad (\text{Ⅲ}.5.60)$$

となり，この両辺に $(1-2m/r)$ をかけると

$$b^2 - \frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = 0 \qquad (\text{Ⅲ}.5.61)$$

このあとは，質点の場合の（Ⅲ.5.38）以降の処理を参照すれば，（Ⅲ.5.46）の代わりに

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = 3m\frac{1}{r^2} \qquad (\text{Ⅲ}.5.62)$$

を得る．ここで，m は（Ⅲ.3.27）に与えられた量（GM/c^2）である．

6 水星の近日点の移動

微分方程式の解

太陽のつくる静的で球対称な場における惑星の運動は，前節で得た微分方程式（Ⅲ.5.50），すなわち

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{\alpha^2} + \frac{3GM}{r^2c^2} \qquad (\text{Ⅲ}.6.1)$$

で記述される．先に述べたがこの式は，ニュートン力学における惑星の運動方程式（Ⅰ.12.3）とは，右辺第 2 項の存在のみが異なっている．

この方程式の解を，（Ⅰ.12.4）を参照して，

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l}(1 + \varepsilon \cos \eta\phi) \qquad (\text{Ⅲ}.6.2)$$

とおく．ここで ε は惑星軌道の離心率であり，1 に比較して小さな値であるとする．

まず，（Ⅲ.6.2）の両辺を ϕ で微分して

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\varepsilon\eta}{l}\sin\eta\phi \tag{Ⅲ.6.3}$$

さらに ϕ で微分して

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{d\phi}\left(-\frac{\varepsilon\eta}{l}\sin\eta\phi\right)=-\frac{\varepsilon\eta^2}{l}\cos\eta\phi \tag{Ⅲ.6.4}$$

（Ⅲ.6.2）および（Ⅲ.6.4）を（Ⅲ.6.1）に代入すると，

$$-\frac{\varepsilon\eta^2}{l}\cos\eta\phi+\frac{1}{l}(1+\varepsilon\cos\eta\phi)=\frac{GM}{\alpha^2}+\frac{3GM}{l^2c^2}(1+\varepsilon\cos\eta\phi)^2 \tag{Ⅲ.6.5}$$

この右辺第 2 項で ε を微小量として近似式（Ⅲ.1.28）を用いると，

$$(1+\varepsilon\cos\eta\phi)^2=1+2\varepsilon\cos\eta\phi \tag{Ⅲ.6.6}$$

これを（Ⅲ.6.5）に代入し $\cos\eta\phi$ について整理すると，

$$\left(-\frac{\varepsilon\eta^2}{l}+\frac{\varepsilon}{l}-\frac{6GM\varepsilon}{l^2c^2}\right)\cos\eta\phi=-\frac{1}{l}+\frac{GM}{\alpha^2}+\frac{3GM}{l^2c^2} \tag{Ⅲ.6.7}$$

この関係は任意の ϕ について成立しなければならないので

$$-\frac{\varepsilon\eta^2}{l}+\frac{\varepsilon}{l}-\frac{6GM\varepsilon}{l^2c^2}=0 \tag{Ⅲ.6.8}$$

$$-\frac{1}{l}+\frac{GM}{\alpha^2}+\frac{3GM}{l^2c^2}=0 \tag{Ⅲ.6.9}$$

（Ⅲ.6.8）の両辺を ε/l で割って

$$-\eta^2+1-\frac{6GM}{lc^2}=0 \tag{Ⅲ.6.10}$$

また，（Ⅲ.6.9）において c^2 を分母にもつ左辺第 3 項を無視すると，

$$\frac{1}{l} \approx \frac{GM}{\alpha^2} \qquad (\text{III}.6.11)$$

これは古典的な関係（I.12.8）と一致する．

（III.6.11）を（III.6.10）に代入して

$$\eta^2 = 1 - \left(\frac{6GM}{c^2}\right)\left(\frac{GM}{\alpha^2}\right) = 1 - \frac{6(GM)^2}{c^2\alpha^2} \qquad (\text{III}.6.12)$$

したがって，

$$\eta = \left(1 - \frac{6(GM)^2}{c^2\alpha^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{3(GM)^2}{c^2\alpha^2} \qquad (\text{III}.6.13)$$

なお，分母に c^2 のある項は微小量なので，近似式（III.1.28）を $n=1/2$ として用いた．

近日点の移動

（III.6.2）において $\phi=0$ のとき近日点である．そうすると，その次の近日点は $\eta\phi=2\pi$ のときであって，（III.6.13）を用いて

$$\eta\phi = \left(1 - \frac{3(GM)^2}{c^2\alpha^2}\right)\phi = 2\pi \qquad (\text{III}.6.14)$$

これより

$$\phi = 2\pi\left(1 - \frac{3(GM)^2}{c^2\alpha^2}\right)^{-1} \approx 2\pi\left(1 + \frac{3(GM)^2}{c^2\alpha^2}\right) \qquad (\text{III}.6.15)$$

ただし，近似式（III.1.28）を $n=-1$ として用いた．

この ϕ は，「次の」近日点における惑星の回転角 ϕ〔図I.5〕である．分母に c^2 のある項はきわめて小さい量なので，$\phi \approx 2\pi$，すなわち先の近日点からほぼ 1 回転にあたる．そしてそのわずかな近日点の移動分 δ は，惑星公転の 1 周期（2π）について，

$$\delta = 2\pi \cdot \frac{3(GM)^2}{c^2\alpha^2} \tag{Ⅲ.6.16}$$

である．あるいは，(Ⅲ.6.11) および (I.12.7) から

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{l(GM)} = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)(GM)} \tag{Ⅲ.6.17}$$

なので，(Ⅲ.6.16) は

$$\delta = 2\pi \cdot \frac{3(GM)}{c^2 a(1-\varepsilon^2)} \tag{Ⅲ.6.18}$$

ここで a は楕円軌道の長径の半分である．

数値計算

(Ⅲ.6.18) は惑星公転 1 周期についての近日点の移動角である．これはラジアン (rad) 単位で与えられており，それを秒 (=1/3600 度) に換算するには，

$$\frac{180}{\pi} \times 3600$$

をかければよい．問題の水星*35 に関するデータを表Ⅲ.2 に掲げる．水星は離心率が比較的に大きく（地球の 0.007 に対して 0.206），長径が太陽系惑星の中でもっとも小さいので，(Ⅲ.6.18) の項が問題になるのである．

表Ⅲ.2　数値の見積もりに関連するデータ

万有引力定数	$G = 6.67 \times 10^{-8}\mathrm{cm^3 s^{-2} g^{-1}}$
太陽の質量	$M = 1.99 \times 10^{33}\mathrm{g}$
光速度	$c = 3.00 \times 10^{10}\mathrm{cm\ s^{-1}}$
水星の長径の半分	$a = 5.79 \times 10^{12}\mathrm{cm}$
水星の離心率	$\varepsilon = 0.206$

*35　第I章 12 節.

δを計算すると，0.103 秒になる．これは水星の公転周期あたりの移動角であり，水星の公転周期は地球上での 88.0 日である．したがって，地球上での 100 年間における近日点の移動は，それにさらに (365/88.0)×100 をかけ，約 43 秒になる．これが「43 秒の謎」の正体である．

7 光線の湾曲

微分方程式の解

太陽の近傍を通過する光の経路を考察する．それは，5 節で導いた微分方程式（Ⅲ.5.62），すなわち

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=3m\frac{1}{r^2} \tag{Ⅲ.7.1}$$

により記述される．この右辺の m は（Ⅲ.3.27）に与えられた量（GM/c^2）で，分母に c^2 をもつ微小量である．まずはこの項を無視すると，

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=0 \tag{Ⅲ.7.2}$$

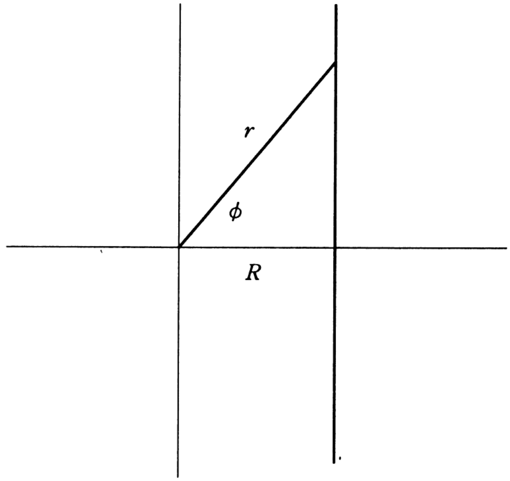
この微分方程式の解は

$$\frac{1}{r}=\frac{\cos\phi}{R} \tag{Ⅲ.7.3}$$

である．これを確認するには両辺を微分して

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{R}\frac{d}{d\phi}\cos\phi=-\frac{1}{R}\sin\phi \tag{Ⅲ.7.4}$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{d\phi}\left(-\frac{1}{R}\sin\phi\right)=-\frac{1}{R}\cos\phi \tag{Ⅲ.7.5}$$



図Ⅲ.1　$d^2(1/r)/d\phi^2+1/r=0$ の解

解は $1/r=\cos\phi/R$ であって，図の直線である．

（Ⅲ.7.5）と（Ⅲ.7.3）は明らかに（Ⅲ.7.2）を満たす．したがって，（Ⅲ.7.3）は（Ⅲ.7.2）の解であることがわかるが，これは図Ⅲ.1 に示す直線である．

第 1 次近似として，先ほど無視した（Ⅲ.7.1）の右辺に（Ⅲ.7.3）を代入すると，

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=3m\left(\frac{\cos\phi}{R}\right)^2 \qquad (\text{Ⅲ}.7.6)$$

この微分方程式の解は

$$\frac{1}{r}=\frac{\cos\phi}{R}+\frac{m}{R^2}(\cos^2\phi+2\sin^2\phi) \qquad (\text{Ⅲ}.7.7)$$

である．これを確認するにはこの両辺を ϕ で微分して

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{d\phi}\left(\frac{\cos\phi}{R}+\frac{m}{R^2}\cos^2\phi+\frac{2m}{R^2}\sin^2\phi\right)$$

$$=-\frac{\sin\phi}{R}-2\frac{m}{R^2}\cos\phi\sin\phi+\frac{4m}{R^2}\sin\phi\cos\phi$$

$$=-\frac{\sin\phi}{R}+\frac{2m}{R^2}\sin\phi\cos\phi \qquad (\text{III}.7.8)$$

さらに ϕ で微分して

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{d\phi}\left(-\frac{\sin\phi}{R}+\frac{2m}{R^2}\sin\phi\cos\phi\right)$$

$$=-\frac{1}{R}\cos\phi+\frac{2m}{R^2}\cos^2\phi-\frac{2m}{R^2}\sin^2\phi \qquad (\text{III}.7.9)$$

（Ⅲ.7.9）と（Ⅲ.7.7）は明らかに（Ⅲ.7.6）を満たす．したがって，（Ⅲ.7.7）は（Ⅲ.7.6）の解であることがわかる．

(x,y) 平面への変換

ここまでは光の伝播を $\theta=\pi/2$ 平面上での (r,ϕ) 座標で考察した．いまこれを (x,y) 座標に変換する．すなわち，

$$x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi\ \left(\text{したがって } r=\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad (\text{III}.7.10)$$

とおくと[*36]，（Ⅲ.7.7）は

$$\frac{1}{r}=\frac{x}{rR}+\frac{m}{R^2}\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{2y^2}{r^2}\right) \qquad (\text{III}.7.11)$$

この両辺に r をかけて

$$1=\frac{x}{R}+\frac{m}{R^2}\left(\frac{x^2+2y^2}{r}\right)=\frac{x}{R}+\frac{m}{R^2}\left(\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad (\text{III}.7.12)$$

＊36 （I.6.1）で $\theta=\pi/2$.

この左右両辺に R をかけて

$$R=x+\frac{m}{R}\left(\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \tag{Ⅲ.7.13}$$

あるいは

$$x=R-\frac{m}{R}\left(\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \tag{Ⅲ.7.14}$$

光線の経路

ここで，太陽の近傍を通過する光線の重力場による湾曲を求める．光は無限遠（$y\to\infty$）から太陽の方向に直進し，太陽近傍で曲げられて，また無限遠（$y\to-\infty$）に直進していくとする．$|y|\to\infty$ のとき，(Ⅲ.7.14) の右辺で y に比較して x を無視すると，

$$x=R-\frac{2m}{R}\frac{y^2}{\sqrt{y^2}} \tag{Ⅲ.7.15}$$

ここで，$\sqrt{y^2}\geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2}&=y\ \ (y\geq 0)\\ &=-y\ \ (y<0)\end{aligned} \tag{Ⅲ.7.16}$$

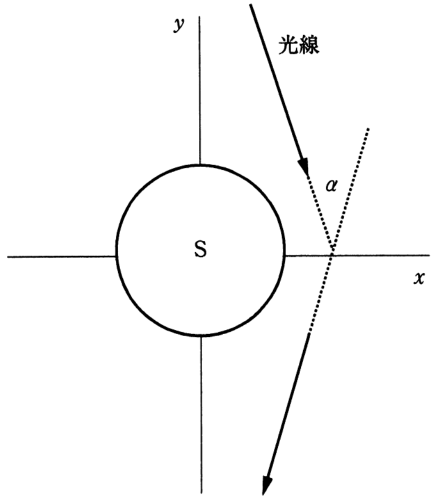
したがって（Ⅲ.7.15）から，光は直線

$$x=R-\frac{2m}{R}y\ \ (y\geq 0) \tag{Ⅲ.7.17}$$

で太陽に近づき，直線

$$x=R+\frac{2m}{R}y\ \ (y<0) \tag{Ⅲ.7.18}$$

で太陽から遠ざかることがわかる〔図Ⅲ.2〕．



図Ⅲ.2　太陽 (S) による光線の湾曲 (α)

この二つの直線がなす角度を α とすると，(x,y) 平面上において，それぞれ傾き k_1 および k_2 を有する二つの直線のなす角度は一般に

$$\tan\alpha=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2} \tag{Ⅲ.7.19}$$

で与えられるので，(Ⅲ.7.17) および (Ⅲ.7.18) から，$k_1=-R/2m$ および $k_2=R/2m$ を代入すると，

$$\tan\alpha=\frac{4mR}{R^2-4m^2} \tag{Ⅲ.7.20}$$

ここでさらに公式

$$\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \tag{Ⅲ.7.21}$$

を用いると,

$$\sin^2\alpha=\frac{16m^2R^2}{(R^2+4m^2)^2} \tag{Ⅲ.7.22}$$

すなわち,

$$\sin\alpha=\frac{4mR}{R^2+4m^2} \tag{Ⅲ.7.23}$$

ここで α は微小角である．そのときには一般に近似式

$$\sin\alpha\approx\alpha \tag{Ⅲ.7.24}$$

が成立する．したがって,

$$\alpha=\frac{4mR}{R^2+4m^2} \tag{Ⅲ.7.25}$$

を得る.

数値計算

ここで R は（Ⅲ.7.3）に現れた量であり，光線と太陽の中心との距離である〔図Ⅲ.1〕．それを太陽の半径に等しい（すなわち，光線は太陽表面ぎりぎりを通過する）と仮定すれば

$$R=6.96\times10^{10}\ \mathrm{cm} \tag{Ⅲ.7.26}$$

また，m は（Ⅲ.3.27）で定義されており〔$m=GM/c^2$〕，前節の末に与えられたデータによれば

$$m=1.47\times10^{5}\ \mathrm{cm} \tag{Ⅲ.7.27}$$

これらを用いて，（Ⅲ.7.25）より

$$\alpha=8.45\times10^{-6}\ \mathrm{rad} \tag{Ⅲ.7.28}$$

これを，前節末と同様，秒に換算して

$$\alpha = 1.7 \text{ 秒} \tag{Ⅲ.7.29}$$

を得る．

8 宇宙論的問題

重力方程式の形式の変更

ここまでは空っぽの空間を対象とし，（Ⅱ.10.1）の重力方程式 $R_{\alpha\beta}=0$ を用いてきた（都合で添字を変更）．宇宙論的問題を扱うには，物質を含む空間に適用できるよう，この方程式を拡張しなければならない．

方程式 $R_{\alpha\beta}=0$ の両辺に $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$ を乗じて添字を上げると，

$$R^{\mu\nu}=0 \tag{Ⅲ.8.1}$$

これを（Ⅱ.9.5）に倣って縮約することにより，

$$R=0 \tag{Ⅲ.8.2}$$

を得る*37．

ここで方程式

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=0 \tag{Ⅲ.8.3}$$

を考察する．この形式に着目する理由はあとで明らかになるであろう．（Ⅲ.8.1）を前提とすれば，方程式（Ⅲ.8.3）は成立する．また逆に，（Ⅲ.8.3）から出発し，この両辺に $g_{\mu\nu}$ をかけ〔（Ⅱ.9.5）および（Ⅱ.1.34）を考慮す〕ると

---

*37 （Ⅱ.9.5）にもとづくと，$R=g^{\nu\rho}R_{\nu\rho}=g^{\nu\rho}(g_{\nu\alpha}g_{\rho\beta}R^{\alpha\beta})=(g^{\nu\rho}g_{\nu\alpha})g_{\rho\beta}R^{\alpha\beta}=g^{\rho}_{\alpha}g_{\rho\beta}R^{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$．ここで，$g^{\rho}_{\alpha}$ は（Ⅱ.1.27）に与えられている．

$$g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R=R-2R=0 \tag{Ⅲ.8.4}$$

すなわち $R=0$ であり，これを（Ⅲ.8.3）に代入すると（Ⅲ.8.1）に戻る．すなわち，（Ⅲ.8.1）と（Ⅲ.8.3）は等価である．

物質が存在する場合

物質が存在する場合，（Ⅲ.8.1）は

$$R^{\mu\nu}=X^{\mu\nu} \tag{Ⅲ.8.5}$$

また（Ⅲ.8.3）は

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=Y^{\mu\nu} \tag{Ⅲ.8.6}$$

のような形式で表されると仮定する．これは，空っぽの空間の場合ニュートン・ポテンシャル ϕ は（Ⅰ.8.8）のラプラス方程式 $\nabla^2\phi=0$ を満たすのに対し，物質が存在してその質量密度が ρ の場合ニュートン・ポテンシャルは（Ⅰ.8.7）のポアソン方程式 $\nabla^2\phi=4\pi\rho$ を満たすという事情*38と並行させたものである．

（Ⅲ.8.6）の左辺のような形式が採用されるのは，ビアンキの関係と呼ばれる式

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{:\nu}=0 \tag{Ⅲ.8.7}$$

がリッチ・テンソルに対して一般に成立するためである*39．すなわち，（Ⅲ.8.6）では

$$Y^{\mu\nu}{}_{:\nu}=0 \tag{Ⅲ.8.8}$$

が要求される．

---

*38　第Ⅰ章11節「ニュートン・ポテンシャル」参照．

*39　第Ⅳ章8節「ビアンキの関係式」参照．

あとの準備のため，(Ⅲ.8.6) は右辺に係数を導入し，

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=\kappa T^{\mu\nu} \qquad (\text{Ⅲ}.8.9)$$

としておく．ここで $T^{\mu\nu}$ は，物質のエネルギー・運動量テンソルと呼ばれる量である*40．あとで明らかになるが，$\kappa<0$ である．

宇宙のモデル

宇宙には至るところに星が存在し，物質の密度は場所によって著しく異なる．しかし，大局的にみた構造を問題とするなら，物質はこの巨大な空間に一様に分布していると考えてよいであろう．すなわち，宇宙における物質の分布は，並進対称性（一様性）と回転対称性（等方性）を有すると仮定できる．

宇宙には特別な場所というものはなく，また物質の存在による空間の曲がり（曲率）はどこでも同一である．そうであるとすると宇宙は，時間 x^0 を一定としたとき（すなわち，ある瞬間において），x^1,x^2,x^3 で表される球状空間でなければならない．これが 1917 年の論文「一般相対性理論での宇宙論的考察」におけるアインシュタインの考えであった．あれやこれやの書物でしばしばもち出される説明であるが，球の表面に住む二次元生物にとっては，自分の「空間」に特別な場所というものはなく，またその曲率はどこでも同一である．

二次元生物にとっての球は，三次元空間 (x,y,z) において，a を一定値として

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (\text{Ⅲ}.8.10)$$

と定義でき，その表面は二次元，曲率半径は a である．他方，三次元生物であるわれわれにとっての球状空間は四次元空間において定義することができ，その「表面」は三次元である．アインシュタインは球状空間を定義する

*40 第Ⅳ章 9 節「物質のエネルギー・運動量テンソル」参照.

ため，四次元ユークリッド空間を用いた．その座標を x,y,z,u とすると，そこでの不変距離 $d\sigma$ は

$$d\sigma^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2+(du)^2 \tag{Ⅲ.8.11}$$

で与えられる．またこの空間において超曲面

$$x^2+y^2+z^2+u^2=a^2 \tag{Ⅲ.8.12}$$

を考えると，この曲面上の点は曲率半径 a の三次元球状空間になる．これがわれわれの宇宙のモデルである．

（Ⅲ.8.11）には変数が四つあるが，（Ⅲ.8.12）の関係により独立な変数は三つである．そこで，（Ⅲ.8.12）を用いて変数を一つ消去すれば，$d\sigma$ は三つの変数で表現される三次元球状空間部分での不変距離を与えることになる．

三次元球状空間部分の不変距離

ここでは次の変換によって，変数を一つ減らすことにする．すなわち，

$$x=\frac{ax^1}{1+\eta^2/4},\quad y=\frac{ax^2}{1+\eta^2/4},\quad z=\frac{ax^3}{1+\eta^2/4},\quad u=\frac{a(1-\eta^2/4)}{1+\eta^2/4} \tag{Ⅲ.8.13}$$

ここで，

$$\eta^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 \tag{Ⅲ.8.14}$$

である．この変換によっても（Ⅲ.8.12）の関係は保たれ，また（Ⅲ.8.11）は

$$d\sigma^2=a^2\frac{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2}{(1+\eta^2/4)^2} \tag{Ⅲ.8.15}$$

に変わる*41．これが三次元球状空間部分での不変距離である．

あとの都合により（Ⅲ.8.13）および（Ⅲ.8.15）を少し一般化し，それぞれ

＊41　第Ⅳ章 10 節「宇宙の空間モデル」参照．

$$x=\frac{ax^1}{1+k\eta^2/4},\quad y=\frac{ax^2}{1+k\eta^2/4},\quad z=\frac{ax^3}{1+k\eta^2/4},\quad u=\frac{a(1-k\eta^2/4)}{1+k\eta^2/4}$$

(Ⅲ.8.16)

および

$$d\sigma^2=a^2\frac{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2}{(1+k\eta^2/4)^2} \tag{Ⅲ.8.17}$$

としておく．いまは$k=1$である．

宇宙における不変距離

宇宙における不変距離は，(Ⅲ.8.17) に時間部分を加えて，

$$ds^2=(cdt)^2-d\sigma^2=(cdt)^2-a^2\frac{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2}{(1+k\eta^2/4)^2} \tag{Ⅲ.8.18}$$

と書くことができるであろう．このような形式であれば，時間が変化しても場所による違いは生じない*42．

宇宙項

アインシュタインは，宇宙は静的である（時間的に変化しない）と考えていた．したがって，(Ⅲ.8.18) のa〔すなわち (Ⅲ.8.12) のa〕は時間に依存しない定数である．彼はこの仮定のもとで，(Ⅲ.8.18) で与えられる計量テンソルおよび彼自身が評価し導入したエネルギー・運動量テンソル$T^{\mu\nu}$を用いて (Ⅲ.8.9) の重力方程式を検討したところ，解が存在しないことを見出した*43．そこで彼は，重力方程式を一般化する方法として，新しい項$\lambda g^{\mu\nu}$の付加を提案した．それにより重力方程式 (Ⅲ.8.9) は

---

*42 $(cdt)^2$の係数〔g_{00}〕は空間座標に依存しない．もし依存するとすれば，たとえば (Ⅲ.2.4) からわかるように，場所によって時間の進みが違ってしまう．また，g_{00}が時間の関数$W(t)$であるとするなら，$\sqrt{W(t)}\,dt=dT$と定義されるTを新しい時間尺度に採用すればg_{00}は1になる．

*43 $T^{\mu\nu}$の内容および重力方程式の計算についてはあとで触れられるであろう．

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R+\lambda g^{\mu\nu}=\kappa T^{\mu\nu} \qquad (\text{Ⅲ}.8.19)$$

に拡張された．この $\lambda g^{\mu\nu}$ は宇宙項，また λ は宇宙定数と呼ばれる．アインシュタインはこの λ により，宇宙における物質の平均密度および球状空間の半径 a が決定されることを示した．本書でもあとで紹介する．

このアインシュタインの静的な宇宙モデルに対し，フリードマン（A. Friedmann, 1888–1925）は，静的宇宙の仮定をやめれば，すなわち（Ⅲ.8.18）の a の時間変化を許せば，宇宙項を導入しなくても，重力方程式は解をもつことを示した．a が時間変化するということは，宇宙は膨張したり収縮したりするということを意味する．なお，（Ⅲ.8.18）で a が時間変化しても，場所による ds^2 の違いは生じてこない．すなわち，宇宙の物質分布に関してすでに述べた想定は，影響を受けない．

k による空間モデルの分類

フリードマンの方程式を扱うに先立ち，宇宙の空間モデルについて考察を進めておく．ここまでは（Ⅲ.8.17）において $k=1$ であるとしてきたが，空間のスカラー曲率が場所によらず一定で回転対称性を有する不変距離はほかにも存在する．それは，$k=-1$ および 0 の場合である[*44]．

$k=1$ の場合：　繰返しになるが，この場合は不変距離が（Ⅲ.8.11）で与えられる空間，すなわち四次元ユークリッド空間で定義される球面 $x^2+y^2+z^2+u^2=a^2$〔(Ⅲ.8.12)〕が三次元空間を表し，それは有限である（すなわち閉じている）．

$k=-1$ の場合：　この場合は，不変距離が

$$d\sigma^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2-(du)^2 \qquad (\text{Ⅲ}.8.20)$$

で与えられる空間，すなわちミンコフスキー空間[*45]で定義される三次元双曲面

＊44　第Ⅳ章 10 節「宇宙の空間モデル」参照.

$$x^2+y^2+z^2-u^2=-a^2 \qquad (\text{III}.8.21)$$

が三次元空間を表現する．これは開いた空間である．なお，この三次元双曲面は「二葉超双曲面」と呼ばれるものである*46.

$k=0$ の場合：　この場合は，不変距離が

$$d\sigma^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2 \qquad (\text{III}.8.22)$$

で与えられる空間，すなわち三次元ユークリッド空間である．三次元ユークリッド空間は曲率が至るところで一定値 0 であり，また回転対称性も有する．これは平坦な空間である．

なお，空間部分の不変距離に現れる a は，空間が閉じている場合には「宇宙の大きさ」と呼ぶことが可能かも知れないが，空間が開いている場合にはその名称は適切でない．いずれにせよそれは，宇宙の大きさの尺度に関わる因子であって，その増大あるいは減少は，宇宙の空間部分の不変距離の増大あるいは減少をもたらすのである．

また，ここでは四次元ユークリッド空間や四次元ミンコフスキー空間がもち出されたが，これは四次元リーマン空間とは別ものであって，曲率が一定で回転対称性を有する三次元空間を定義するために導入したものである．先に「平行」を定義するとき，次元のより高い平らな空間を用いたが（第II章3節），それと同様の趣旨で，曲がった三次元空間を定義するため「平ら」な四次元空間を用いたのである．

エネルギー・運動量テンソル

宇宙における物質の性質は流体として扱われる．アインシュタインは，「星々を物質の塵芥（じんかい）で置き換える」という趣旨を述べた．すなわち，多数の塵芥からなる流体である．そこで $T^{\mu\nu}$ は，流体が静止して見える慣性系にお

*45　ミンコフスキー空間は特殊相対性理論が記述される四次元空間のことである．（III.8.20）は（I.2.7）とともにミンコフスキー空間の不変距離であるが，両者では符号が逆になっている．（III.8.17）の形式を保つためには，ここでは（III.8.20）のほうが都合がよい．

*46　三次元ユークリッド空間における二葉双曲面は，$-x^2/a^2-y^2/b^2+z^2/c^2=1$ で与えられる．ここで $a=b=c$ とすれば，$x^2+y^2-z^2=-a^2$ となる．

いて，

$$T^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \qquad (\text{Ⅲ}.8.23)$$

で与えられるものを用いる．すなわち，

$$T^{00}=c^2\rho,\quad T^{11}=T^{22}=T^{33}=p \qquad (\text{Ⅲ}.8.24)$$

（そして他の成分は0）である．式中の $c^2\rho$ はエネルギー密度，p は圧力である*47．

この $T^{\mu\nu}$ は，完全流体，すなわち粘性がまったくない流体に対して与えられるものである．圧力 p は，流体中に微小な立方体を想定したとき，その面に作用する単位面積あたりの力であって，静止流体ではすべての面で圧力が等しい．流体が地上における水であるとすれば，この p は静水圧と呼ばれる量である．宇宙においては p は非常に小さいと考えられ，

$$p \ll c^2\rho \qquad (\text{Ⅲ}.8.25)$$

が成立している．このことは係数 c^2 の存在からしても明らかであろう．

（Ⅲ.8.23）は流体に対して静止している慣性系でのテンソルであるが，これを流体に対して運動している一般の系に変換すると，

$$T^{\mu\nu}=(c^2\rho+p)v^\mu v^\nu-pg^{\mu\nu} \qquad (\text{Ⅲ}.8.26)$$

になる．ここで，v^μ は速度ベクトル dx^μ/ds である．

この式は次のようにして理解できる．変換後の $T^{\mu\nu}$ はテンソル方程式で表現されなければならない．ここで，$T^{\mu\nu}$ に関わる物理量は，（変換前のテンソル成分を除いては）v^μ と $g^{\mu\nu}$ のみである．したがって $T^{\mu\nu}$ は，

$$T^{\mu\nu}=av^\mu v^\nu+bg^{\mu\nu} \qquad (\text{Ⅲ}.8.27)$$

---

*47　第Ⅳ章9節「物質のエネルギー・運動量テンソル」参照．

の形式で表現されるはずである．

この式で a および b を決める手がかりは，流体に対して静止している慣性系におけるテンソル成分（Ⅲ.8.24）である．この系では

$$v^1 = v^2 = v^3 = 0 \tag{Ⅲ.8.28}$$

また（Ⅲ.1.8）の $g_{00}v^0v^0 + g_{mn}v^m v^n = 1$ が成立しているので，ここで $g_{00}=1$（慣性系での値）を考慮すれば，

$$v^0 = 1 \tag{Ⅲ.8.29}$$

これらの v^μ の値を用い，また慣性系では $g^{00}=1$，$g^{mm}=-1$，$g^{\mu\nu}=0$（$\mu \neq \nu$）であることを考慮すれば，（Ⅲ.8.27）が（Ⅲ.8.24）を導くためには，

$$a+b=c^2\rho, \quad -b=p \tag{Ⅲ.8.30}$$

が必要である．これにより（Ⅲ.8.27）は（Ⅲ.8.26）と一致するのである．

（Ⅲ.8.26）はテンソル方程式である．したがって，式中の $g^{\mu\nu}$ に着目する系の計量テンソルを用いれば，それは一般の系において成立する．

フリードマン方程式の導出

（Ⅲ.8.18）からは計量テンソル

$$g_{00}=1, \quad g_{11}=g_{22}=g_{33}=-a^2\frac{1}{(1+k\eta^2/4)^2} \tag{Ⅲ.8.31}$$

を読み取ることができる（他の成分はすべて 0）．また，エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は（Ⅲ.8.26）に与えられたので，重力方程式（Ⅲ.8.19）を組み上げることができる．

なお，若干回りくどく思われるかも知れないが，ここでは流体に対して静止している座標系を採用する．そのような系では〔（Ⅲ.8.31）により $g^{00}=1$，$g^{\mu\nu}=0$（$\mu \neq \nu$）であり，また〕（Ⅲ.8.28）および（Ⅲ.8.29）が成立している．したがって，（Ⅲ.8.26）から，

$$T^{00}=c^2\rho,\quad T^{mm}=-pg^{mm} \tag{Ⅲ.8.32}$$

（ただし，$m=1,2,3$）を得る．他の成分はすべて0である．

（Ⅲ.8.24）と（Ⅲ.8.32）はともに流体に対して静止した系でのテンソル成分であるが，前者は慣性系，後者は曲がった空間での値である．

以上のデータを用いて重力方程式を表現すると*48，

$$2\frac{a''}{ac^2}+\frac{(a')^2}{a^2c^2}+\frac{k}{a^2}-\lambda=\kappa p \tag{Ⅲ.8.33}$$

$$-3\frac{(a')^2}{a^2c^2}-3\frac{k}{a^2}+\lambda=\kappa c^2\rho \tag{Ⅲ.8.34}$$

となって，ここでとくに（Ⅲ.8.34）がフリードマン方程式と呼ばれるものである．なお，aに付したダッシュは，時間による微分を表す．

アインシュタインの静的モデル

フリードマン方程式の意味を考察するに先立ち，アインシュタインの静的モデルに戻ってみる．それは方程式（Ⅲ.8.33）および（Ⅲ.8.34）に含まれているのである．モデルは静的なので，aの時間微分はすべて0である．また，まずは宇宙項のない場合を考察するとして，$\lambda=0$としておく．さらに，球状空間であるから$k=1$である．すると二つの方程式は

$$\frac{1}{a^2}=\kappa p \tag{Ⅲ.8.35}$$

$$-\frac{3}{a^2}=\kappa c^2\rho \tag{Ⅲ.8.36}$$

になる．アインシュタインは重力方程式を解くとき，（Ⅲ.8.25）の関係を考慮して，$p=0$という自然な仮定をした*49．それをそのままこれらの式にあてはめれば，$a\to\infty$となって，宇宙におけるエネルギー密度あるいは物質の

---

*48　第Ⅳ章11節「フリードマン方程式の導出」参照．

*49　この仮定はまっとうであって，本書でもこのあと採用する．

密度は0になってしまう.

このように重力方程式からは解が得られず，そのために導入されたのが宇宙項である．宇宙項を考慮すれば（すなわち，$\lambda \neq 0$ であれば)，(Ⅲ.8.33) および（Ⅲ.8.34）は（$p=0$ とすると）

$$\frac{1}{a^2}-\lambda=0 \qquad (Ⅲ.8.37)$$

$$-\frac{3}{a^2}+\lambda=\kappa c^2 \rho \qquad (Ⅲ.8.38)$$

となる．（Ⅲ.8.37）からは宇宙定数が球状空間の半径 a を与えることになるし，また（Ⅲ.8.38）と組み合わせれば，

$$-2\lambda=\kappa c^2 \rho \qquad (Ⅲ.8.39)$$

となって，宇宙定数により宇宙における物質の平均密度 ρ が決定されることになる．これがアインシュタインの示したことであった．なお，(Ⅲ.8.37) より $\lambda>0$，したがって（Ⅲ.8.39）により，$\kappa<0$ である．

フリードマン方程式の解

（Ⅲ.8.34）の両辺に a^3 をかけると

$$-3\frac{a(a')^2}{c^2}-3ak+\lambda a^3=\kappa c^2 \rho a^3 \qquad (Ⅲ.8.40)$$

この両辺を t で微分する．変数は a, ρ である．

$$-3\frac{a'(a')^2}{c^2}-3\frac{2a(a')a''}{c^2}-3a'k+3\lambda a^2 a'=\kappa c^2 \rho' a^3+3\kappa c^2 \rho a^2 a' \qquad (Ⅲ.8.41)$$

少し整理して

$$-3\frac{(a')^3}{c^2}-6\frac{aa'a''}{c^2}-3a'k+3\lambda a^2a'=\kappa c^2\rho' a^3+3\kappa c^2\rho a^2a' \quad (\text{Ⅲ}.8.42)$$

他方，（Ⅲ.8.33）の両辺に $3a^2a'$ をかけると，

$$6\frac{aa'a''}{c^2}+3\frac{(a')^3}{c^2}+3a'k-3\lambda a^2a'=3\kappa p a^2a' \quad (\text{Ⅲ}.8.43)$$

（Ⅲ.8.42）と（Ⅲ.8.43）を辺々加えると，左辺はすべて相殺して，

$$\kappa c^2\rho' a^3+3\kappa c^2\rho a^2a'+3\kappa p a^2a'=0 \quad (\text{Ⅲ}.8.44)$$

両辺を κ で割り，一つの項を右辺に移すと

$$c^2\rho' a^3+3c^2\rho a^2a'=-3pa^2a' \quad (\text{Ⅲ}.8.45)$$

これは

$$\frac{d}{dt}(c^2\rho a^3)=-p\frac{da^3}{dt} \quad (\text{Ⅲ}.8.46)$$

と書くことができる．

ここで，（Ⅲ.8.25）の関係を考慮して，$p=0$ とすると，

$$\frac{d}{dt}(c^2\rho a^3)=0 \quad (\text{Ⅲ}.8.47)$$

さらに定数 C を導入し

$$c^2\rho a^3=\frac{3}{-\kappa}C\ (\text{定数})>0 \quad (\text{Ⅲ}.8.48)$$

とおいて*50，これを（Ⅲ.8.34）に代入し ρ を消去すると，

*50　（Ⅲ.8.39）に関連して考察したように，$\kappa<0$ である．

$$-3\frac{(a')^2}{a^2c^2}-3\frac{k}{a^2}+\lambda=\kappa\left(\frac{3C}{-\kappa a^3}\right) \tag{Ⅲ.8.49}$$

これより，

$$(a')^2=c^2\left(\frac{C}{a}-k+\frac{\lambda}{3}a^2\right) \tag{Ⅲ.8.50}$$

すなわち，

$$\frac{da}{dt}=\pm c\sqrt{\frac{C}{a}-k+\frac{\lambda}{3}a^2} \tag{Ⅲ.8.51}$$

を得る．

フリードマン方程式の意味

すでに述べたように，k は 0，± 1 の値をとる．ここでは，それぞれの場合に（Ⅲ.8.51）が示唆する内容を考察する．なお，宇宙定数 λ は 0 としておく．

$k=0$ の場合：　このとき（Ⅲ.8.51）は

$$\frac{da}{dt}=\pm c\sqrt{\frac{C}{a}} \tag{Ⅲ.8.52}$$

であって，a は単調に増加するか，減少するかのどちらかである．

$k=1$ の場合：　このとき（Ⅲ.8.51）は

$$\frac{da}{dt}=\pm c\sqrt{\frac{C}{a}-1} \tag{Ⅲ.8.53}$$

であり，a は C 以下でなければならない．したがって，a は 0 と C の間を往復することになるであろう．サイクロイドと呼ばれる曲線*51 は一般に微分

*51　サイクロイドは半径 r の円が直線状を滑らずに転がるときの円周上の 1 点の軌跡である．

方程式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{2r}{y}-1 \qquad (\text{Ⅲ}.8.54)$$

で与えられる．したがって，(Ⅲ.8.53) により，a は t 軸上を転がるサイクロイドであることがわかる．

$k=-1$ の場合：　このとき (Ⅲ.8.51) は

$$\frac{da}{dt}=\pm c\sqrt{\frac{C}{a}+1} \qquad (\text{Ⅲ}.8.55)$$

であって，a は単調に増加するか，減少するかのどちらかである．

このように，フリードマン方程式によれば，宇宙の動的モデルとしては，単調膨張，単調収縮，あるいはサイクロイド的振動のいずれも，理論的には可能ということになる．

ハッブルの発見

フリードマンの論文「空間の曲率について」が発表されたのは 1922 年のことであったが，それとほぼ同じ時期に，ハッブル (E. P. Hubble, 1889–1953) は継続的に遠方の星雲を観測していた．それらの赤方偏移をもとに彼が膨張宇宙論を提起したのは，1929 年の論文「銀河系外星雲における距離と視線速度の関係」であった．アインシュタインは，『相対論の意味』の「第二版への付録」(1945) *52 の中で，「フリードマンの結果は，ハッブルによる恒星系の膨張（距離とともに一様に増大するスペクトル線の赤方偏移）の発見によって，驚くべき確証を得た」と書いている．

＊52　第一版がプリンストン大学出版部から刊行されたのは 1922 年であった．

第IV章

補足的事項

1 余因子

正方行列 A において要素 A_{ij} を含む行と列を除いて得られる行列式に $(-1)^{i+j}$ を乗じたものを A の (i,j) 余因子という．それを Δ^{ij} で表し，また A の行列式を $|A|$ とすると，一般に

$$|A|=\sum_i A_{ik}\Delta^{ik}=\sum_i A_{ki}\Delta^{ki} \tag{Ⅳ.1.1}$$

および

$$\sum_i A_{ik}\Delta^{ij}=\sum_i A_{ki}\Delta^{ji}=0 \quad (j\neq k) \tag{Ⅳ.1.2}$$

が成立する．（Ⅳ.1.1）は行列式の定義から直ちに得られる．また，（Ⅳ.1.2）は二つの列あるいは行が等しいときの行列式の値に対応する．

ここで，$|g|$ を $g_{\mu\nu}$ を要素とする行列式，また $\Delta^{\mu\nu}$ を g の (μ,ν) 余因子として，新しい要素

$$g^{\mu\nu}=\frac{\Delta^{\mu\nu}}{|g|} \tag{Ⅳ.1.3}$$

を定義すると，

$$\sum_\nu g_{\mu\nu}g^{\rho\nu}=\sum_\nu \frac{g_{\mu\nu}\Delta^{\rho\nu}}{|g|} \tag{Ⅳ.1.4}$$

この式の値は $\mu=\rho$ のとき（Ⅳ.1.1）より 1，$\mu\neq\rho$ のとき（Ⅳ.1.2）より 0 である．したがって，ここで和に関するアインシュタインの規約を用いると，

$$g_{\mu\nu}g^{\rho\nu}=g^{\rho}_{\mu} \tag{Ⅳ.1.5}$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
g^{\rho}_{\mu}&=1 \quad (\mu=\rho)\\
&=0 \quad (\mu\neq\rho)
\end{aligned}
\tag{Ⅳ.1.6}
$$

を得る.

なお，本書の第Ⅱ章9節では $|g|$ を単に g と記している.

2 $A_{\mu:\nu}=A_{\mu,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}A_\alpha$ の変換

第Ⅱ章6節では A_μ の共変微分 $A_{\mu:\nu}=A_{\mu,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}A_\alpha$ がテンソルであることを商の定理から証明したが，ここでは変換規則からテンソルであることを確認しておく.

まず，$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ の変換規則を求める．これには測地線の方程式（Ⅱ.5.11）を利用する．これはテンソル方程式であり，座標変換後も同じ形式で記述できる．すなわち，

$$
\frac{d^2x^{\mu'}}{ds^2}+\Gamma^{\mu'}_{\nu'\sigma'}\frac{dx^{\nu'}}{ds}\frac{dx^{\sigma'}}{ds}=0 \tag{Ⅳ.2.1}
$$

ここで，$dx^{\mu'}$ はベクトルなので，変換規則

$$
dx^{\mu'}=x^{\mu'}{}_{,\mu}\,dx^{\mu} \tag{Ⅳ.2.2}
$$

にしたがう．したがって，

$$
\frac{dx^{\mu'}}{ds}=x^{\mu'}{}_{,\mu}\frac{dx^{\mu}}{ds} \tag{Ⅳ.2.3}
$$

これをさらに微分すると，

$$
\frac{d^2x^{\mu'}}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(x^{\mu'}{}_{,\mu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)=\left(\frac{d}{ds}x^{\mu'}{}_{,\mu}\right)\frac{dx^{\mu}}{ds}+x^{\mu'}{}_{,\mu}\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} \tag{Ⅳ.2.4}
$$

ここで，右辺第1項において

$$\frac{d}{ds}x^{\mu'}{}_{,\mu}=\left(\frac{d}{dx^{\sigma}}x^{\mu'}{}_{,\mu}\right)\frac{dx^{\sigma}}{ds}=x^{\mu'}{}_{,\mu\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{ds} \qquad (\text{Ⅳ}.2.5)$$

これを（Ⅳ.2.4）に代入して

$$\frac{d^2x^{\mu'}}{ds^2}=x^{\mu'}{}_{,\mu\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{ds}\frac{dx^{\mu}}{ds}+x^{\mu'}{}_{,\mu}\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} \qquad (\text{Ⅳ}.2.6)$$

（Ⅳ.2.3）および（Ⅳ.2.6）を（Ⅳ.2.1）に代入して

$$x^{\mu'}{}_{,\mu\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{ds}\frac{dx^{\mu}}{ds}+x^{\mu'}{}_{,\mu}\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2}+\Gamma^{\mu'}_{\nu'\sigma'}\left(x^{\nu'}{}_{,\nu}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right)\left(x^{\sigma'}{}_{,\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{ds}\right)=0 \qquad (\text{Ⅳ}.2.7)$$

さらに，（Ⅱ.5.11）から得られる

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2}=-\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\frac{dx^{\nu}}{ds}\frac{dx^{\sigma}}{ds} \qquad (\text{Ⅳ}.2.8)$$

を（Ⅳ.2.7）の左辺第 2 項に代入して

$$x^{\mu'}{}_{,\mu\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{ds}\frac{dx^{\mu}}{ds}-x^{\mu'}{}_{,\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\frac{dx^{\nu}}{ds}\frac{dx^{\sigma}}{ds}+\Gamma^{\mu'}_{\nu'\sigma'}\left(x^{\nu'}{}_{,\nu}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right)\left(x^{\sigma'}{}_{,\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{ds}\right)=0 \qquad (\text{Ⅳ}.2.9)$$

左辺第 1 項でダミー添字を μ から ν に変更（ただし，μ' はダミーでないのでそのままに）して整理すると

$$(x^{\mu'}{}_{,\nu\sigma}-x^{\mu'}{}_{,\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}+\Gamma^{\mu'}_{\nu'\sigma'}x^{\nu'}{}_{,\nu}x^{\sigma'}{}_{,\sigma})\frac{dx^{\nu}}{ds}\frac{dx^{\sigma}}{ds}=0 \qquad (\text{Ⅳ}.2.10)$$

これが常に成立するためには，

$$x^{\mu'}{}_{,\nu\sigma}-x^{\mu'}{}_{,\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}+\Gamma^{\mu'}_{\nu'\sigma'}x^{\nu'}{}_{,\nu}x^{\sigma'}{}_{,\sigma}=0 \qquad (\text{Ⅳ}.2.11)$$

これから，

$$x^{\mu'}{}_{,\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}=x^{\mu'}{}_{,\nu\sigma}+\Gamma^{\mu'}_{\nu'\sigma'}x^{\nu'}{}_{,\nu}x^{\sigma'}{}_{,\sigma} \tag{Ⅳ.2.12}$$

これがクリストッフェル記号の変換規則である．ここで，ダッシュ（′）の関係を入れ換えると，

$$x^{\mu}{}_{,\mu'}\Gamma^{\mu'}_{\nu'\sigma'}=x^{\mu}{}_{,\nu'\sigma'}+\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}x^{\nu}{}_{,\nu'}x^{\sigma}{}_{,\sigma'} \tag{Ⅳ.2.13}$$

になる．これは逆の変換規則である．ここで，$x^{\mu}{}_{,\nu'\sigma'}$ について解くと

$$x^{\mu}{}_{,\nu'\sigma'}=x^{\mu}{}_{,\mu'}\Gamma^{\mu'}_{\nu'\sigma'}-\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}x^{\nu}{}_{,\nu'}x^{\sigma}{}_{,\sigma'} \tag{Ⅳ.2.14}$$

ところで，第Ⅱ章6節から

$$A_{\mu',\nu'}=A_{\rho,\sigma}x^{\sigma}{}_{,\nu'}x^{\rho}{}_{,\mu'}+A_{\rho}x^{\rho}{}_{,\mu'\nu'} \tag{Ⅱ.6.2}$$

であり，(Ⅳ.2.14) において $\mu\to\rho$，$\nu\to\mu$，$\sigma\to\nu$（およびそれぞれにダッシュを付けたもの）の置き換えをおこなって，それを（Ⅱ.6.2）の右辺第2項に代入すると，

$$A_{\mu',\nu'}=A_{\rho,\sigma}x^{\sigma}{}_{,\nu'}x^{\rho}{}_{,\mu'}+A_{\rho}x^{\rho}{}_{,\rho'}\Gamma^{\rho'}_{\mu'\nu'}-A_{\rho}x^{\mu}{}_{,\mu'}x^{\nu}{}_{,\nu'}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \tag{Ⅳ.2.15}$$

この右辺第2項において，ベクトルの変換規則により

$$A_{\rho}x^{\rho}{}_{,\rho'}=A_{\rho'} \tag{Ⅳ.2.16}$$

なので，これを代入して左辺に移項すると．

$$A_{\mu',\nu'}-A_{\rho'}\Gamma^{\rho'}_{\mu'\nu'}=A_{\rho,\sigma}x^{\sigma}{}_{,\nu'}x^{\rho}{}_{,\mu'}-A_{\rho}x^{\mu}{}_{,\mu'}x^{\nu}{}_{,\nu'}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \tag{Ⅳ.2.17}$$

この右辺第1項でダミー添字を $\rho\to\mu$，$\sigma\to\nu$ と変更し整理すると

$$A_{\mu',\nu'}-A_{\rho'}\Gamma^{\rho'}_{\mu'\nu'}=(A_{\mu,\nu}-A_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})x^{\mu}{}_{,\mu'}x^{\nu}{}_{,\nu'} \tag{Ⅳ.2.18}$$

これは，$A_{\mu,\nu}-A_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ がテンソルとして変換されることを示す．

3 ベクトル平行移動の経路依存性

点 x におけるベクトル A_μ を $x+dx$ まで平行移動し，それからさらに $(x+dx)+\delta x$ まで移動させた場合（経路 1）と，最初 $x+\delta x$ に平行移動し，次いで $(x+\delta x)+dx$ まで移動させた場合（経路 2）の差を求めたい．経路 1 ではまず，A_μ を $x+dx$ まで平行移動して $A_\mu+dA_\mu$，ここで（Ⅱ.4.13）より

$$dA_\mu=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}A_\sigma dx^\nu \tag{Ⅳ.3.1}$$

である．

ついで，$A_\mu+dA_\mu$ をさらに δx 平行移動させると，ベクトルは

$$A_\mu+dA_\mu+\delta(A_\mu+dA_\mu) \tag{Ⅳ.3.2}$$

になる．ここで，$\delta(A_\mu+dA_\mu)$ の計算にあたっては，（Ⅳ.3.1）において

$$A_\mu\to A_\mu+dA_\mu=A_\mu+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}A_\sigma dx^\nu \tag{Ⅳ.3.3a}$$

$$d\to\delta \tag{Ⅳ.3.3b}$$

の置き換えをおこなうのであるが，それに加え，（Ⅳ.3.1）の $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ はベクトル A_μ の位置，すなわち点 x での値であるので，それをベクトル $A_\mu+dA_\mu$ の位置 $(x+dx)$ へと変換しておかなければならない．すなわち，

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\to\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\rho}dx^\rho \tag{Ⅳ.3.4}$$

である[*1]．以上の置き換えに対応して（Ⅳ.3.1）は

$$\begin{aligned}\delta(A_\mu+dA_\mu)&=(\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\rho}dx^\rho)(A_\sigma+\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}A_\alpha dx^\beta)\delta x^\nu\\&=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}A_\sigma\delta x^\nu+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}A_\alpha dx^\beta\delta x^\nu+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\rho}A_\sigma dx^\rho\delta x^\nu\end{aligned} \tag{Ⅳ.3.5}$$

になる．なお，$dx^\beta dx^\rho\delta x^\nu$ を含む 3 次の微小項は無視した．

（Ⅳ.3.2）に（Ⅳ.3.5）を代入して

＊1　微分の項については，たとえば（Ⅱ.2.3）参照．そこでの Q が $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ に対応する．

経路 1

$$A_\mu+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}A_\sigma dx^\nu+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}A_\sigma\delta x^\nu+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\rho}A_\sigma dx^\rho\delta x^\nu+\Gamma^\sigma_{\mu\nu,\rho}A_\sigma dx^\rho\delta x^\nu$$

を得る．なお，第 4 項ではダミー添字 $\beta\to\rho$，$\alpha\leftrightarrow\sigma$ の変更をおこなった．

経路 2 については，経路 1 において d と δ を入れ替え，

$$A_\mu+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}A_\sigma\delta x^\nu+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}A_\sigma dx^\nu+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\rho}A_\sigma\delta x^\rho dx^\nu+\Gamma^\sigma_{\mu\nu,\rho}A_\sigma\delta x^\rho dx^\nu$$

そこで，二つの経路の差は

$$\begin{aligned}(\text{経路 1})-(\text{経路 2})&=(\Gamma^\sigma_{\mu\nu,\rho}-\Gamma^\sigma_{\mu\rho,\nu}+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\rho}-\Gamma^\alpha_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu})A_\sigma\delta x^\nu dx^\rho\\&=R^\sigma_{\mu\rho\nu}A_\sigma\delta x^\nu dx^\rho\end{aligned}\qquad(\text{Ⅳ.3.6})$$

なお，全体を $A_\sigma\delta x^\nu dx^\rho$ で括るため，適宜ダミー添字の変更をおこなった．また，最後の変形には（Ⅱ.7.5）を用いた．

したがって，第Ⅱ章 8 節で述べたように，曲率テンソル $R^\sigma_{\mu\rho\nu}$ が 0 であるなら，ベクトルの平行移動は経路によらず同じ結果を与える．

4 完全微分

x^μ（$\mu=1,2,\cdots\cdots$）の関数 $F(x^1,x^2,\cdots\cdots)$ が微分形式

$$dF=f_1(x^1,x^2,\cdots\cdots)dx^1+f_2(x^1,x^2,\cdots\cdots)dx^2+\cdots\cdots\qquad(\text{Ⅳ.4.1})$$

で表現され，この式が $F(x^1,x^2,\cdots\cdots)$ の全微分

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial F}{\partial x^2}dx^2+\cdots\cdots\qquad(\text{Ⅳ.4.2})$$

に等しい場合，その微分形式を完全微分という．完全微分であれば，積分によって F を得ることができる．

（Ⅳ.4.1）が完全微分であるための必要十分条件は，$\mu,\nu=1,2,\cdots\cdots$ に対して

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x^\nu}=\frac{\partial f_\nu}{\partial x^\mu} \qquad (\text{Ⅳ}.4.3)$$

が成立することである．（Ⅳ.4.2）と（Ⅳ.4.1）の比較により $f_\mu=\partial F/\partial x^\mu$ である．したがって（Ⅳ.4.3）の条件は，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^\nu \partial x^\mu}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \qquad (\text{Ⅳ}.4.4)$$

になる．

第Ⅱ章8節における

$$S_{,\mu\nu}=S_{,\nu\mu} \qquad (\text{Ⅱ}.8.3)$$

は（Ⅳ.4.4）に対応する条件を表現している．したがって，S は完全微分で表現でき，積分可能である．

5 ヤコビアン

変換の行列

ヤコビアン J は

$$J=\frac{\partial(x^{0'},x^{1'},x^{2'},x^{3'})}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)} \qquad (\text{Ⅳ}.5.1)$$

と表現され，$x^{\mu'}{}_{,\alpha}$ を要素とする行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} & \dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} & \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^0} & \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^0} & \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

である．

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の変換式は

$$g_{\alpha\beta}=x^{\mu'}{}_{,\alpha}x^{\nu'}{}_{,\beta}g_{\mu'\nu'} \tag{Ⅳ.5.2}$$

であるが，ここで $\mu',\nu'=0',1',2',3'$，また $\alpha,\beta=0,1,2,3$ であって，$x^{\mu'}{}_{,\alpha}$ および $x^{\nu'}{}_{,\beta}$ はヤコビアン行列を構成する要素である．

行列の積

a_{ik} を要素とする行列 A と，b_{kj} を要素とする行列 B との積

$$C=AB \tag{Ⅳ.5.3}$$

の要素を c_{ij} とすると，

$$c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj} \tag{Ⅳ.5.4}$$

の関係がある．

A の行列式を $|A|$ のように表すと，行列と行列式との関係から，

$$|C|=|AB|=|A|\,|B| \tag{Ⅳ.5.5}$$

が成立する．また，

$$D=ABC \tag{Ⅳ.5.6}$$

とすると，BC は一つの行列とみることができるので，

$$|D| = |A|\,|BC| \tag{Ⅳ.5.7}$$

これに（Ⅳ.5.5）を適用して

$$|D| = |A|\,|B|\,|C| \tag{Ⅳ.5.8}$$

を得る．

行列式 g の変換

（Ⅳ.5.2）の右辺を並べ直した

$$g_{\alpha\beta} = x^{\mu'}{}_{,\alpha}\, g_{\mu'\nu'}\, x^{\nu'}{}_{,\beta} \tag{Ⅳ.5.9}$$

は，それぞれ，$x^{\mu'}{}_{,\alpha}$，$g_{\mu'\nu'}$ および $x^{\nu'}{}_{,\beta}$ を要素とする三つの行列の積とみることができる．ヤコビアンの行列式 J の記号を使用し，また $g_{\mu\nu}$ および $g_{\mu'\nu'}$ の行列式をそれぞれ g および g' で表すと，（Ⅳ.5.9）および（Ⅳ.5.8）から

$$g = Jg'J \tag{Ⅳ.5.10}$$

これより，第Ⅱ章11節で用いた関係式

$$g = J^2 g' \tag{Ⅱ.11.3}$$

を得る．

6　クリストッフェル記号および リッチ・テンソルの計算例

計量テンソル

シュヴァルツシルトの解におけるクリストッフェル記号とリッチ・テンソルの計算例を示す．まず，0でない計量テンソルは，第Ⅲ章3節より

$$g_{00} = e^{2\nu},\quad g_{11} = -e^{2\lambda},\quad g_{22} = -r^2,\quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta \tag{Ⅲ.3.5}$$

$$g^{00}=e^{-2\nu},\ g^{11}=-e^{-2\lambda},\ g^{22}=-r^{-2},\ g^{33}=-r^{-2}\sin^{-2}\theta \qquad (\text{III}.3.7)$$

である．

Γ^1_{00} の計算

（II.4.11）および（II.4.8）より

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}=g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\sigma}=\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\lambda\nu,\sigma}+g_{\lambda\sigma,\nu}-g_{\nu\sigma,\lambda}) \qquad (\text{IV}.6.1)$$

これを用いると

$$\Gamma^1_{00}=\frac{1}{2}g^{1\lambda}(g_{\lambda0,0}+g_{\lambda0,0}-g_{00,\lambda}) \qquad (\text{IV}.6.2)$$

重力場は静的（III.1.1）であり，またこの右辺においては $\lambda=1$（それ以外では $g^{1\lambda}=0$）なので，

$$\Gamma^1_{00}=-\frac{1}{2}g^{11}g_{00,1} \qquad (\text{IV}.6.3)$$

ここで $x^1=r$ であり，r についての微分を（第III章3節と同様）ダッシュで表すことにして，

$$g_{00,1}=\frac{d}{dr}g_{00}=\frac{d}{dr}e^{2\nu}=e^{2\nu}2\nu' \qquad (\text{IV}.6.4)$$

これを（IV.6.3）に代入し，上に引用した（III.3.7）を考慮すると

$$\Gamma^1_{00}=\frac{1}{2}e^{-2\lambda}(e^{2\nu}2\nu')=\nu' e^{2\nu-2\lambda} \qquad (\text{IV}.6.5)$$

これが求めていたものである．

R_{00} の計算

ゼロでないクリストッフェル記号は，第Ⅲ章3節より

$$\Gamma^1_{00}=\nu' e^{2\nu-2\lambda},\ \ \Gamma^1_{11}=\lambda',\ \ \Gamma^1_{22}=-re^{-2\lambda},\ \ \Gamma^1_{33}=-re^{-2\lambda}\sin^2\theta \quad (\text{Ⅲ}.3.9\text{a})$$

$$\Gamma^0_{10}=\nu',\ \ \Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=r^{-1},\ \ \Gamma^3_{23}=\cot\theta,\ \ \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta \quad (\text{Ⅲ}.3.9\text{b})$$

であり，下の二つの添字は対称なのでその一方のみが記されている．

ここで第Ⅱ章9節より

$$R_{\mu\nu}=\Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha}+\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} \quad (\text{Ⅱ}.9.6)$$

これを用いると

$$R_{00}=\Gamma^\alpha_{0\alpha,0}-\Gamma^\alpha_{00,\alpha}+\Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{0\alpha}-\Gamma^\alpha_{00}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} \quad (\text{Ⅳ}.6.6)$$

であり，以下この式の右辺の項を順次計算する．上に引用した（Ⅲ.3.9）によれば，第1項の $\Gamma^\alpha_{0\alpha}$ の形式で0でないものは存在せず，したがって

$$\Gamma^\alpha_{0\alpha,0}=0 \quad (\text{Ⅳ}.6.7)$$

第2項の Γ^α_{00} で0でないものは Γ^1_{00} のみである．これはすでに（Ⅳ.6.5）で計算ずみである．そこで，

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{00,\alpha}=\Gamma^1_{00,1}&=\frac{d}{dr}\nu' e^{2\nu-2\lambda}=\nu'' e^{2\nu-2\lambda}+\nu'(2\nu'-2\lambda')e^{2\nu-2\lambda}\\&=(2\nu'^2-2\nu'\lambda'+\nu'')e^{2\nu-2\lambda}\end{aligned} \quad (\text{Ⅳ}.6.8)$$

（Ⅳ.6.6）の右辺第3項は $\Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{0\alpha}$ であり，$\Gamma^\alpha_{0\beta}$ の形式で0でない成分は $\beta=0,1$ のものだけである．そこで β について和をとって，

$$\Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{0\alpha}=\Gamma^\alpha_{00}\Gamma^0_{0\alpha}+\Gamma^\alpha_{01}\Gamma^1_{0\alpha} \quad (\text{Ⅳ}.6.9)$$

この右辺第1項の Γ^α_{00} は $\alpha=1$ のときのみ0でなく，第2項の Γ^α_{01} は $\alpha=0$ のときのみ0でない．したがって，

$$\Gamma^{\alpha}_{0\beta}\Gamma^{\beta}_{0\alpha}=\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{01}+\Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{00}=2\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{10}=2\nu'^{2}e^{2\nu-2\lambda} \qquad (\text{IV}.6.10)$$

(IV.6.6) の最後の項 $\Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}$ における Γ^{α}_{00} は $\alpha=1$ の成分のみ 0 でない．そこで，$\alpha=1$ において β について和をとって

$$\Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}=\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{\beta}_{1\beta}=\Gamma^{1}_{00}(\Gamma^{0}_{10}+\Gamma^{1}_{11}+\Gamma^{2}_{12}+\Gamma^{3}_{13})$$
$$=\nu'e^{2\nu-2\lambda}(\nu'+\lambda'+2r^{-1})=e^{2\nu-2\lambda}(\nu'^{2}+\nu'\lambda'+2\nu'r^{-1}) \qquad (\text{IV}.6.11)$$

(IV.6.6) の右辺に，以上で計算した (IV.6.7)，(IV.6.8)，(IV.6.10)，(IV.6.11) を代入して，第III章3節の

$$R_{00}=\left(-\nu''+\lambda'\nu'-\nu'^{2}-\frac{2\nu'}{r}\right)e^{2\nu-2\lambda} \qquad (\text{III}.3.10)$$

を得る．

7 光の伝播における周期と座標時

第III章2節では，光の伝播において座標時による周期は一定に保たれることを考察した．ここでは，それを簡単な計算により示す．

第III章1節の式

$$ds^{2}=g_{00}dx^{0}dx^{0}+g_{mn}dx^{m}dx^{n} \qquad (\text{III}.1.4)$$

において $x^{0}=ct$ とし，また地点 A および B を指定する座標を $x^{1}=r$ で表すことにする．そうすると x^{2} および x^{3} に関する変化はないので $dx^{2}=dx^{3}=0$，したがって (III.1.4) は

$$ds^{2}=c^{2}g_{00}(dt)^{2}+g_{11}(dr)^{2} \qquad (\text{IV}.7.1)$$

になる．第II章5節で仮定したように，光の経路はゼロ測地線 $ds^{2}=0$〔(II.5.14)〕なので，(IV.7.1) から，

$$c^2 g_{00}(dt)^2 + g_{11}(dr)^2 = 0 \tag{Ⅳ.7.2}$$

これより

$$dt = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{-g_{11}(r)}{g_{00}(r)}}\,dr \tag{Ⅳ.7.3}$$

を得る．なお，ここでは静的な重力場が対象なので，計量テンソルは t には依存せず，r のみの関数である．また，重力場の影響が減少するにつれて系は特殊相対性理論に連続的に移行するので，$g_{00}>0$ かつ $g_{11}<0$ であることを考慮した．

いま地点 A から時刻 t_{A1} に光を発射し，それが地点 B へ時刻 t_{B1} に到達するとする．このとき到達にかかる時間は

$$t_{B1} - t_{A1} = \int_{t_{A1}}^{t_{B1}} dt = \frac{1}{c}\int_{r_A}^{r_B} \sqrt{\frac{-g_{11}(r)}{g_{00}(r)}}\,dr \tag{Ⅳ.7.4}$$

ここで r_A および r_B はそれぞれ，地点 A および B における r の値である．同様にして，t_{A1} のあとの時刻 t_{A2} に地点 A から光を発射し，それが地点 B へ時刻 t_{B2} に到達するとする．このとき到達にかかる時間は

$$t_{B2} - t_{A2} = \int_{t_{A2}}^{t_{B2}} dt = \frac{1}{c}\int_{r_A}^{r_B} \sqrt{\frac{-g_{11}(r)}{g_{00}(r)}}\,dr \tag{Ⅳ.7.5}$$

この両式から，

$$t_{B1} - t_{A1} = t_{B2} - t_{A2} \tag{Ⅳ.7.6}$$

が得られ，したがって

$$t_{A2} - t_{A1} = t_{B2} - t_{B1} \tag{Ⅳ.7.7}$$

すなわち，光の伝播については，地点 A の座標時による時間間隔と地点 B の座標時による時間間隔は等しいことがわかる．

8 ビアンキの関係式

2 回続けての共変微分

テンソルを 2 回続けて共変微分する．まず，テンソルが二つのベクトルの積の場合，

$$(A_\mu B_\tau)_{:\rho:\sigma}=(A_{\mu:\rho}B_\tau+A_\mu B_{\tau:\rho})_{:\sigma}$$
$$=A_{\mu:\rho:\sigma}B_\tau+A_{\mu:\rho}B_{\tau:\sigma}+A_{\mu:\sigma}B_{\tau:\rho}+A_\mu B_{\tau:\rho:\sigma} \qquad (\text{IV}.8.1)$$

ここで，ρ と σ を交換してもとの式から引き，（II.7.4）を用いると，

$$(A_\mu B_\tau)_{:\rho:\sigma}-(A_\mu B_\tau)_{:\sigma:\rho}=A_\alpha R^\alpha_{\mu\rho\sigma}B_\tau+A_\mu R^\alpha_{\tau\rho\sigma}B_\alpha \qquad (\text{IV}.8.2)$$

この結果は一般のテンソル $T_{\mu\tau}$ に転用可能なので，

$$T_{\mu\tau:\rho:\sigma}-T_{\mu\tau:\sigma:\rho}=T_{\alpha\tau}R^\alpha_{\mu\rho\sigma}+T_{\mu\alpha}R^\alpha_{\tau\rho\sigma} \qquad (\text{IV}.8.3)$$

となる．ここで，$T_{\mu\tau}$ を $A_{\mu:\tau}$ に見立てると，

$$A_{\mu:\tau:\rho:\sigma}-A_{\mu:\tau:\sigma:\rho}=A_{\alpha:\tau}R^\alpha_{\mu\rho\sigma}+A_{\mu:\alpha}R^\alpha_{\tau\rho\sigma} \qquad (\text{IV}.8.4)$$

が成立する．

巡回置換

（IV.8.4）で τ，ρ，σ の巡回置換をおこなう．巡回置換とは，たとえば $\tau\to\rho$，$\rho\to\sigma$，$\sigma\to\tau$ のように，順次記号を置き換える操作である．置換によって得られる三種の式を加え合わせると，その左辺は

$$A_{\mu:\tau:\rho:\sigma}-A_{\mu:\tau:\sigma:\rho}$$
$$A_{\mu:\rho:\sigma:\tau}-A_{\mu:\rho:\tau:\sigma}$$
$$A_{\mu:\sigma:\tau:\rho}-A_{\mu:\sigma:\rho:\tau}$$

の和である．ここでは，最後が τ による微分の項を代表に選んで，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= A_{\mu:\rho:\sigma:\tau} - A_{\mu:\sigma:\rho:\tau} + (\text{巡回置換}) \\
&= (A_{\mu:\rho:\sigma} - A_{\mu:\sigma:\rho})_{:\tau} + (\text{巡回置換})
\end{aligned}
\tag{Ⅳ.8.5}
$$

と書ける．この式は（Ⅱ.7.4）により

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (A_{\alpha} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma})_{:\tau} + (\text{巡回置換}) \\
&= A_{\alpha:\tau} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} + A_{\alpha} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\tau} + (\text{巡回置換})
\end{aligned}
\tag{Ⅳ.8.6}
$$

となる．

他方，（Ⅳ.8.4）を巡回置換して加え合わせた式の右辺は

$$
\begin{gathered}
A_{\alpha:\tau} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} + A_{\mu:\alpha} R^{\alpha}_{\tau\rho\sigma} \\
A_{\alpha:\rho} R^{\alpha}_{\mu\sigma\tau} + A_{\mu:\alpha} R^{\alpha}_{\rho\sigma\tau} \\
A_{\alpha:\sigma} R^{\alpha}_{\mu\tau\rho} + A_{\mu:\alpha} R^{\alpha}_{\sigma\tau\rho}
\end{gathered}
$$

の和であって，この右側の三つの項の和は（Ⅱ.7.7）を用いると

$$
A_{\mu:\alpha}(R^{\alpha}_{\tau\rho\sigma} + R^{\alpha}_{\rho\sigma\tau} + R^{\alpha}_{\sigma\tau\rho}) = 0 \tag{Ⅳ.8.7}
$$

そこで

$$
\text{右辺} = A_{\alpha:\tau} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} + (\text{巡回置換}) \tag{Ⅳ.8.8}
$$

を得る．

恒等式

左辺（Ⅳ.8.6）と右辺（Ⅳ.8.8）を等しいとおくと，

$$
A_{\alpha} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\tau} + (\text{巡回置換}) = 0 \tag{Ⅳ.8.9}
$$

となり，ここで A_{α} はすべて共通なので除去して，

$$
R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\tau} + R^{\alpha}_{\mu\sigma\tau:\rho} + R^{\alpha}_{\mu\tau\rho:\sigma} = 0 \tag{Ⅳ.8.10}
$$

を得る．これをビアンキの恒等式という．

ビアンキの関係式

ビアンキの恒等式（Ⅳ.8.10）において $\tau=\alpha$ とし，両辺に $g^{\mu\rho}$ を乗じると

$$g^{\mu\rho}(R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\alpha}+R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha:\rho}+R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho:\sigma})=0 \tag{Ⅳ.8.11}$$

ここで，計量テンソルは共変微分に対して「定数」のように扱うことができるので〔←(Ⅱ.6.15)〕,

$$(g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma})_{:\alpha}+(g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha})_{:\rho}+(g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho})_{:\sigma}=0 \tag{Ⅳ.8.12}$$

と書ける．

（Ⅳ.8.12）の左辺第 1 項では

$$g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma}=g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\rho\sigma}=g^{\alpha\beta}g^{\mu\rho}R_{\mu\beta\sigma\rho}=g^{\alpha\beta}R^{\rho}_{\beta\sigma\rho}=g^{\alpha\beta}R_{\beta\sigma}=R^{\alpha}_{\sigma} \tag{Ⅳ.8.13}$$

と変形できる．なおここでは，（Ⅱ.7.17）の右の等号の関係および（Ⅱ.9.1）を用いた．また，（Ⅳ.8.12）の左辺第 2 項では，（Ⅱ.9.1）を用いて

$$g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha}=g^{\mu\rho}R_{\mu\sigma}=R^{\rho}_{\sigma} \tag{Ⅳ.8.14}$$

さらに，（Ⅳ.8.12）の左辺第 3 項では，（Ⅱ.7.6）の関係を用いて

$$g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho}=-g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\rho\alpha}=-g^{\mu\rho}R_{\mu\rho}=-R \tag{Ⅳ.8.15}$$

こうして得られた（Ⅳ.8.13），（Ⅳ.8.14）および（Ⅳ.8.15）の 3 式を（Ⅳ.8.12）の左辺の各項に代入すると，

$$R^{\alpha}_{\sigma:\alpha}+R^{\rho}_{\sigma:\rho}-R_{:\sigma}=0 \tag{Ⅳ.8.16}$$

すなわち（左辺第 2 項のダミー添字を α に変えて）

$$2R^{\alpha}_{\sigma:\alpha}-R_{:\sigma}=0 \tag{Ⅳ.8.17}$$

これはリッチ・テンソルに対するビアンキの関係式と呼ばれる．

（Ⅳ.8.17）において，$\sigma\to\alpha$，$\alpha\to\beta$ と記号を変え，両辺に $g^{\sigma\alpha}$ をかけると，

$$2g^{\sigma\alpha}R^{\beta}_{\alpha:\beta}-g^{\sigma\alpha}R_{:\alpha}=0 \qquad (\text{Ⅳ}.8.18)$$

この第１項で添字を上げて

$$2R^{\sigma\beta}{}_{:\beta}-g^{\sigma\alpha}R_{:\alpha}=0 \qquad (\text{Ⅳ}.8.19)$$

ここで左辺第１項のダミー添字を α に変え，両辺を２で割って

$$\left(R^{\sigma\alpha}-\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}R\right)_{:\alpha}=0 \qquad (\text{Ⅳ}.8.20)$$

を得る．これは（Ⅲ.8.7）である．

9 物質のエネルギー・運動量テンソル

一般形

エネルギー・運動量テンソルは，流体などに対して，

$$T^{\mu\nu}=c^2\rho_0 v^{\mu}v^{\nu} \qquad (\text{Ⅳ}.9.1)$$

で定義される．ここで v^{μ} は速度ベクトル $dx^{\mu}/ds=dx^{\mu}/cd\tau$ であり，また ρ_0 は静止質量密度（静止状態で測定した物質の密度）である．エネルギー・運動量テンソルは基本的に特殊相対性理論の枠内で定義される．ただしそれはテンソルなので，適切な変換をすれば，あらゆる座標系において成立する．

静止質量を m_0，また静止体積を w_0 とすると，

$$\rho_0=m_0/w_0 \qquad (\text{Ⅳ}.9.2)$$

であり，特殊相対性理論においては，運動速度を v とすると，質量 m および体積 w は

$$m=m_0/\sqrt{1-(v/c)^2},\quad w=w_0\sqrt{1-(v/c)^2} \qquad (\text{Ⅳ}.9.3)$$

の関係にあるので，質量密度 $\rho=m/w$ は

$$\rho=\rho_0/(1-(v/c)^2) \tag{IV.9.4}$$

で表される．

（IV.9.1）より

$$T^{\mu\nu}=c^2\rho_0\frac{dx^\mu}{cd\tau}\frac{dx^\nu}{cd\tau}=\rho_0\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{IV.9.5}$$

ここで，$\mu=\nu=0$ の成分は

$$T^{00}=\rho_0\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau}=\rho_0\frac{cdt}{d\tau}\frac{cdt}{d\tau}=\rho_0c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2=c^2\frac{\rho_0}{1-(v/c)^2}=c^2\rho \tag{IV.9.6}$$

ただし，この変形には (IV.9.4)，および (I.2.13) の関係 $dt/d\tau=1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ を用いた．また，$m=1,2,3$ とすると，

$$T^{0m}=\rho_0\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau}=\rho_0\frac{cdt}{d\tau}\left(\frac{dx^m}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)$$
$$=c\rho_0\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left(\frac{dx^m}{dt}\right)=c\rho\left(\frac{dx^m}{dt}\right) \tag{IV.9.7}$$

同様にして，$m,n=1,2,3$ とすると，

$$T^{mn}=\rho_0\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau}=\rho_0\left(\frac{dx^m}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^n}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)$$
$$=\rho_0\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}=\rho\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt} \tag{IV.9.8}$$

ここで，

$$\frac{dx^1}{dt}=v_x,\quad \frac{dx^2}{dt}=v_y,\quad \frac{dx^3}{dt}=v_z \tag{IV.9.9}$$

と定義すると，

$$T^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} c^2\rho & c\rho v_x & c\rho v_y & c\rho v_z \\ c\rho v_x & \rho v_x v_x & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ c\rho v_y & \rho v_x v_y & \rho v_y v_y & \rho v_y v_z \\ c\rho v_z & \rho v_x v_z & \rho v_y v_z & \rho v_z v_z \end{pmatrix} \quad (\text{IV}.9.10)$$

とまとめられる．

T^{00} の成分 $c^2\rho$ はエネルギー密度と呼ばれる．これは，ρ が質量密度であること，および $E=mc^2$ の公式を思い起こせば理解できる．ρv_x 等は運動量密度であり，$\rho v_x v_y$ 等はその流れを表す．

使用するテンソル

宇宙論的問題においては，第Ⅲ章で与えられるエネルギー・運動量テンソル

$$T^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (\text{III}.8.23)$$

を使用する．これは流体が静止して見える慣性系で与えられるものである．したがってこの式の ρ は，本節における ρ_0 にあたるものである．

（Ⅳ.9.10）における $\rho v_x v_x$ 等とこちらのテンソルに現れる圧力 p との関係を，ここでは次元により示しておく．前提としては，

[運動量]＝[質量][速度]（$p=mv$）

[力]＝[質量][速度]/[時間]（$f=mdv/dt$）

[圧力]＝[力]/[面積]

である．そこで $\rho v_x v_x$ 等の次元は

[密度][速度][速度]＝([質量]/[体積])[速度]([長さ]/[時間])

$$=([質量][速度]/[時間])([長さ]/[体積])$$
$$=[力]/[面積]=[圧力]$$

となる．

ビアンキの関係との対応

$T^{\mu\nu}$ は，重力方程式（Ⅲ.8.9）の右辺を構成する．そのためには，ビアンキの関係式が要求する条件（Ⅲ.8.8），すなわち

$$T^{\mu\nu}{}_{:\nu}=0 \tag{Ⅳ.9.11}$$

が満足されなければならない*2．これに（Ⅳ.9.1）を代入すると

$$T^{\mu\nu}{}_{:\nu}=(c^2\rho_0 v^\mu v^\nu)_{:\nu}=c^2 v^\mu(\rho_0 v^\nu)_{:\nu}+c^2\rho_0 v^\nu v^\mu{}_{:\nu} \tag{Ⅳ.9.12}$$

となる．

まず，この右辺第 1 項における $(\rho_0 v^\nu)_{:\nu}$ に着目する．（Ⅱ.11.19）に与えられた式 $(A^\nu\surd)_{,\nu}=0$ で $A^\nu=\rho_0 v^\nu$ とおくと，

$$(\rho_0 v^\nu\surd)_{,\nu}=0 \tag{Ⅳ.9.13}$$

これは密度 $\rho_0 v^0\surd$，流束 $\rho_0 v^m\surd$（$m=1,2,3$）で規定される流体の保存則に対応する．このとき，（Ⅱ.11.18）の式 $A^\nu{}_{:\nu}\surd=(A^\nu\surd)_{,\nu}$ より，（この右辺は 0 なので）

$$(\rho_0 v^\nu)_{:\nu}=0 \tag{Ⅳ.9.14}$$

を得る．

他方，（Ⅳ.9.12）の右辺第 2 項の $v^\nu v^\mu{}_{:\nu}$ は，この流体が測地線に沿って運動するなら，やはり 0 である．すなわち，一般に

---

*2　この事情は拡張された重力方程式（Ⅲ.8.19）でも同じである．計量テンソルは共変微分に対しては定数のように扱うことができるので〔(Ⅱ.6.15)〕，宇宙項を付加しても影響されないのである．

$$\frac{dv^\mu}{ds}=\frac{dv^\mu}{dx^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}=v^\mu{}_{,\nu}v^\nu \qquad (\text{Ⅳ}.9.15)$$

であるから，これを測地線の方程式（Ⅱ.5.10）に代入すると

$$v^\mu{}_{,\nu}v^\nu+\Gamma^\mu_{\nu\sigma}v^\nu v^\sigma=(v^\mu{}_{,\nu}+\Gamma^\mu_{\nu\sigma}v^\sigma)v^\nu=0 \qquad (\text{Ⅳ}.9.16)$$

そこで，共変微分の公式（Ⅱ.6.21）を用いると

$$v^\mu{}_{:\nu}v^\nu=0 \qquad (\text{Ⅳ}.9.17)$$

となる．

まとめると，（Ⅳ.9.12）の右辺は第1項も第2項も0であり，$T^{\mu\nu}$ は（Ⅳ.9.11）の条件を満たす．このように，重力方程式に対するビアンキの関係式の要求は，質量保存の法則（連続の方程式）および運動方程式（測地線）に関わるのである．

10　宇宙の空間モデル

変換式の微分形

変換式（Ⅲ.8.16）は

$$x=\frac{ax^1}{K},\quad y=\frac{ax^2}{K},\quad z=\frac{ax^3}{K},\quad u=\frac{a(1-k\eta^2/4)}{K} \qquad (\text{Ⅳ}.10.1)$$

ただし，

$$K=1+k\eta^2/4 \qquad (\text{Ⅳ}.10.2)$$

および

$$\eta^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 \qquad (\text{Ⅳ}.10.3)$$

である．

また

$$dx=\frac{\partial x}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial x}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial x}{\partial x^3}dx^3 \tag{Ⅳ.10.4}$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial y}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial y}{\partial x^3}dx^3 \tag{Ⅳ.10.5}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial z}{\partial x^3}dx^3 \tag{Ⅳ.10.6}$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial u}{\partial x^3}dx^3 \tag{Ⅳ.10.7}$$

と書くことができるので，

$$\frac{\partial K}{\partial x^m}=\frac{k}{2}x^m \quad (m=1,2,3) \tag{Ⅳ.10.8}$$

などを考慮して各係数を求めると，

$$dx=\frac{a}{2K^2}(2K-k(x^1)^2)dx^1-\frac{kax^1x^2}{2K^2}dx^2-\frac{kax^1x^3}{2K^2}dx^3 \tag{Ⅳ.10.9}$$

$$dy=-\frac{kax^1x^2}{2K^2}dx^1+\frac{a}{2K^2}(2K-k(x^2)^2)dx^2-\frac{kax^2x^3}{2K^2}dx^3 \tag{Ⅳ.10.10}$$

$$dz=-\frac{kax^1x^3}{2K^2}dx^1-\frac{kax^2x^3}{2K^2}dx^2+\frac{a}{2K^2}(2K-k(x^3)^2)dx^3 \tag{Ⅳ.10.11}$$

$$du=-\frac{ka}{K^2}(x^1dx^1+x^2dx^2+x^3dx^3) \tag{Ⅳ.10.12}$$

が得られる．

$k=1$ の場合：

ここで，$k=1$ として，（Ⅲ.8.11） の $d\sigma^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2+(du)^2$ に

（Ⅳ.10.9）～（Ⅳ.10.12）を代入すると

$$d\sigma^2 = a^2 \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{K^2} \qquad (Ⅳ.10.13)$$

を得る*3．これが（Ⅲ.8.17）である．また，（Ⅳ.10.1）を（Ⅲ.8.12）の左辺 $x^2+y^2+z^2+u^2$ に代入すると，

$$x^2+y^2+z^2+u^2=a^2 \qquad (Ⅳ.10.14)$$

となって，（Ⅲ.8.12）の関係が保たれていることを確認できる．

$k=-1$ の場合：

ここで，$k=-1$ として，（Ⅳ.10.9）～（Ⅳ.10.12）を

$$d\sigma^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2-(du)^2 \qquad (Ⅳ.10.15)$$

に代入すると，やはり上の（Ⅳ.10.13）を得る*4．また，（Ⅳ.10.1）では，

$$x^2+y^2+z^2-u^2=-a^2 \qquad (Ⅳ.10.16)$$

の関係が成立している．

$k=0$ の場合：

$k=0$ の場合の（Ⅳ.10.1）は，四次元ユークリッド空間において一つの座標 u を固定したときの，残りの三次元ユークリッド空間である．

11 フリードマン方程式の導出

計量テンソル

添字が下の計量テンソルは（Ⅲ.8.31）に与えられており，0でない成分を少し形式を変えてここに再現すると，

---

*3　なお，計算においては，$K-1=\eta^2/4$ の関係に注意．

*4　なお，計算においては，$K-1=-\eta^2/4$ の関係に注意．

$$g_{00}=1,\ \ g_{11}=g_{22}=g_{33}=-\frac{a^2}{K^2} \tag{IV.11.1}$$

ここで，$K=1+k\eta^2/4$，また $\eta^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$ である．また，これらの添字を上げると，

$$g^{00}=1,\ \ g^{11}=g^{22}=g^{33}=-\frac{K^2}{a^2} \tag{IV.11.2}$$

であり，やはり他の成分は 0 である．

クリストッフェル記号

第 2 種のクリストッフェル記号はすでに本章に与えられており，ここに再現すると，

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}=\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\lambda\nu,\sigma}+g_{\lambda\sigma,\nu}-g_{\nu\sigma,\lambda}) \tag{IV.6.1}$$

これを用いて 0 でない成分を求めると，$m,n=1,2,3$ として

$$\Gamma^{0}_{mm}=\frac{aa'}{cK^2},\ \ \Gamma^{m}_{0m}=\frac{a'}{ca},$$

$$\Gamma^{m}_{mn}=-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{K}\right)x^n\ (n=m\ \text{を含む}),\ \ \Gamma^{n}_{mm}=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{K}\right)x^n\ (n\neq m) \tag{IV.11.3}$$

ここでダッシュは時間による微分を表す．また，計算にあたっては，すでに本章に示した

$$\frac{\partial K}{\partial x^m}=\frac{k}{2}x^m \tag{IV.10.8}$$

を用いた．

リッチ・テンソル

リッチ・テンソルに関する第Ⅱ章の式をここに再現すると，

$$R_{\mu\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} \tag{Ⅱ.9.6}$$

(Ⅳ.11.3) に与えられたクリストッフェル記号の値を用いてこの各成分を計算すると，0でない成分は

$$R_{00}=3\frac{a''}{ac^2},\quad R_{mm}=-2\frac{(a')^2}{c^2K^2}-\frac{aa''}{c^2K^2}-2\frac{k}{K^2} \tag{Ⅳ.11.4}$$

である．

スカラー曲率は (Ⅱ.9.5) に $R=g^{\nu\rho}R_{\nu\rho}$ と与えられている．上のリッチ・テンソルを用いて計算すると，

$$R=\frac{6}{c^2}\left(\frac{a''}{a}\right)+\frac{6}{c^2}\left(\frac{a'}{a}\right)^2+\frac{6k}{a^2} \tag{Ⅳ.11.5}$$

さらに，$R^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta}$ によって

$$R^{00}=3\frac{a''}{ac^2},\quad R^{mm}=\left(\frac{K}{a}\right)^2\left(-\frac{2}{c^2}\left(\frac{a'}{a}\right)^2-\frac{a''}{c^2a}-2\frac{k}{a^2}\right) \tag{Ⅳ.11.6}$$

を得る．

重力方程式

ここで算出したリッチ・テンソル，スカラー曲率，計量テンソル，および第Ⅲ章に与えられたエネルギー・運動量テンソルの成分

$$T^{00}=c^2\rho,\quad T^{mm}=-pg^{mm} \tag{Ⅲ.8.32}$$

を重力方程式

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R+\lambda g^{\mu\nu}=\kappa T^{\mu\nu} \qquad (\text{III}.8.19)$$

に代入すると，すでに示した二つの方程式

$$(mm)\text{成分に対応して：}\quad 2\frac{a''}{ac^2}+\frac{(a')^2}{a^2c^2}+\frac{k}{a^2}-\lambda=\kappa p \qquad (\text{III}.8.33)$$

$$(00)\text{成分に対応して：}\quad -3\frac{(a')^2}{a^2c^2}-3\frac{k}{a^2}+\lambda=\kappa c^2\rho \qquad (\text{III}.8.34)$$

を得る．後者がフリードマン方程式である．

索引

ア行

カ行

サ行

タ行

ナ行

ハ行

マ行

ヤ行

ラ行

著者紹介

唐木田 健一

1946年，長野県生まれ．1970年，東京大学理学部卒業．1975年，同大学大学院理学系研究科博士課程修了，理学博士．
元富士ゼロックス基礎研究所所長．
著書に『原論文で学ぶ アインシュタインの相対性理論』（ちくま学芸文庫 M&S），『分数ができない大学生』（共著，ちくま文庫），『理論の創造と創造の理論』（朝倉書店），『エクセルギーの基礎』（オーム社），『生命論』（批評社），『徹底検証 21世紀の全技術』（共著，藤原書店）などのほか，「桂愛景」のペンネームで著書『戯曲 アインシュタインの秘密』，『サルトルの饗宴』（いずれもサイエンスハウス）など．

NDC421　204p　21cm

ひとりで学べる一般相対性理論
ディラックの記号法で宇宙の方程式を解く

2015年12月18日　第1刷発行

著　者　唐木田健一
発行者　鈴木哲
発行所　株式会社　講談社
〒112-8001　東京都文京区音羽2-12-21
販売　(03)5395-4415
業務　(03)5395-3615
編　集　株式会社　講談社サイエンティフィク
代表　矢吹俊吉
〒162-0825　東京都新宿区神楽坂2-14　ノービィビル
編集　(03)3235-3701
本文データ作成　美研プリンティング株式会社
カバー・表紙印刷　豊国印刷株式会社
本文印刷・製本　株式会社講談社

Printed in Japan
ISBN978-4-06-153292-2